

# Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Pedro Infante Moreira

Tomo 1



ESPOCH  
2016





**Electromagnetismo básico  
e introducción a los circuitos eléctricos**

---



# Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

---

Tomo 1

Pedro Infante Moreira



**Electromagnetismo básico  
e introducción a los circuitos eléctricos**

© 2016 Pedro Infante Moreira

© 2016 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

**Aval ESPOCH**

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*).

**Corrección y diseño:**

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa  
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos. Tomo 1.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

110 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9941-14-228-3

1. Circuitos eléctricos
2. Física
3. Electricidad
4. Electromagnetismo

## CONTENIDO GENERAL

### TOMO 1

Introducción .....	13
Capítulo 1. Ley de Coulomb .....	15
1.1 Introducción .....	15
1.2 Carga eléctrica.....	15
1.3 Conductores y aislantes .....	18
1.3.1 Inducción de cargas.....	19
1.4 Tierra.....	19
1.5 Ley de Coulomb .....	21
1.5.1 Propiedades de la fuerza entre dos partículas cargadas....	21
1.5.2 La ley de Coulomb en forma vectorial .....	25
1.6 Ley de Coulomb para conjuntos de partículas cargadas .....	26
1.7 Ejercicios de aplicación .....	29
Capítulo 2. El campo eléctrico .....	57
2.1 Introducción.....	57
2.2 Campo eléctrico .....	57
2.3 Cálculo de campos eléctricos.....	59
2.3.1 Campo de un grupo de cargas puntuales.....	59
2.3.2 Campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico .....	63
2.3.3 Un dipolo en un campo eléctrico .....	67
2.3.4 Campo eléctrico para una distribución lineal de cargas..	68
2.3.5 Campo eléctrico para una distribución superficial de cargas..	69
2.3.6 Campo eléctrico para una distribución volumétrica de cargas..	69
2.4 Representación geométrica del campo eléctrico .....	70
2.5 Ejercicios de aplicación .....	73

## TOMO 2

Capítulo 3. Ley de Gauss .....	9
3.1 Flujo eléctrico.....	9
3.2 Flujo que emana una carga puntual.....	10
3.3 Ley de Gauss.....	12
3.3.1 Ley de Gauss para una distribución lineal de cargas ..	13
3.3.2 Ley de Gauss para una distribución superficial de cargas ..	14
3.3.3 Ley de Gauss para una distribución volumétrica de cargas..	16
3.4 El campo eléctrico en presencia de un conductor.....	17
3.5 Ejercicios de aplicación .....	20
Capítulo 4. Potencial eléctrico .....	39
4.1 Trabajo .....	39
4.2 Energía potencial .....	43
4.3 Diferencia de potencial.....	43
4.3.1 Diferencia de potencial entre dos puntos .....	45
4.4 Potencial debido a varias cargas puntuales.....	47
4.5 Relación entre potencial y el campo eléctrico .....	48
4.6 Cálculo de campos eléctricos mediante el potencial .....	50
4.7 Energía en el campo electrostático .....	51
4.8 El electrón-voltio .....	54
4.9 Ejercicios de aplicación .....	55
Capítulo 5. Capacitancia y dieléctricos .....	71
5.1 El condensador.....	71
5.2 Capacitancia o capacidad.....	71
5.2.1 Capacidad del condensador de placas planas.....	72
5.2.2 Capacidad de un condensador esférico.....	73
5.2.3 Capacidades entre cilindros coaxiales.....	75
5.3 Asociación de condensadores: serie, paralelo, $\Delta \rightarrow Y$ .....	77
5.4 Energía almacenada en los condensadores .....	82
5.4.1 Energía que almacena un condensador de placas paralelas en su campo eléctrico .....	83

5.5 Dieléctricos .....	84
5.6 Influencia del dieléctrico en su condensador .....	85
5.7 Ley de Gauss en condensadores con dieléctricos.....	87
5.8 Energía almacenada en un medio dieléctrico .....	89
5.9 Ejercicios de aplicación .....	89

## TOMO 3

Capítulo 6. Corriente eléctrica y resistencia.....	9
6.1 Corriente eléctrica.....	9
6.2 Corriente convencional .....	10
6.3 Velocidad de arrastre o de deriva .....	11
6.4 Densidad de corriente .....	12
6.5 Resistencia - Ley de Ohm.....	14
6.6 Resistividad - conductividad .....	16
6.7 Coeficiente de temperatura para la resistividad .....	18
6.8 Disipación de energía en una resistencia .....	19
6.9 Ejercicios de aplicación .....	20
Capítulo 7. Circuitos resistivos .....	35
7.1 Fuerza electromotriz.....	35
7.2 Resistencia interna .....	38
7.3 Ley de las corrientes de Kirchhoff.....	39
7.4 Ley de los voltajes de Kirchhoff .....	41
7.5 Asociación de resistencias.....	43
7.5.1 Resistencias conectadas en serie .....	43
7.5.2 Resistencias conectadas en paralelo.....	44
7.5.3 Transformación delta-estrella ( $\Delta \rightarrow Y$ ).....	46
7.6 Método de las corrientes de nodos .....	46
7.7 Métodos de las corrientes de malla.....	48
7.8 Circuitos RC en serie .....	51
7.8.1 Proceso de carga de un condensador .....	51
7.8.2 Proceso de descarga del condensador .....	55

7.9. Ejercicios de aplicación.....	57
Capítulo 8. Campo magnético.....	81
8.1 Polos magnéticos.....	81
8.2 Descubrimiento de Oersted y Ampere.....	82
8.3 Campo magnético.....	83
8.4 Líneas de inducción magnética.....	87
8.5 Fuerza magnética sobre un conductor.....	88
8.6 Momento de torsión sobre un lazo de corriente en un campo magnético uniforme.....	90
8.7 Ejercicios de aplicación.....	93

## TOMO 4

Capítulo 9. Ley de Ampere. Ley de Biot-Savart.....	9
9.1 Determinación experimental de la Ley de Ampere.....	9
9.2 Fuerzas entre conductores paralelos.....	17
9.3 Campo magnético de un solenoide.....	20
9.4 Campo magnético en el interior de un toroide.....	23
9.5. Ley de Biot_Savart.....	24
9.6 Ejercicios de aplicación.....	26
Capítulo 10. Ley de Inducción de Faraday.....	53
10.1 Flujo de campo magnético.....	53
10.2 Verificación experimental de la Ley de Inducción de Faraday...	56
10.3 Cambio de flujo del campo magnético.....	58
10.4 Fuerza electromotriz debida al movimiento.....	61
10.5 Ley de Inducción de Faraday.....	64
10.6 Ley de Lenz.....	67
10.7 Ejercicios de aplicación.....	68
Referencias.....	83

## CONTENIDO TOMO 1

Introducción .....	13
Capítulo 1. Ley de Coulomb .....	15
1.1 Introducción .....	15
1.2 Carga eléctrica.....	15
1.3 Conductores y aislantes .....	18
1.3.1 Inducción de cargas.....	19
1.4 Tierra.....	19
1.5 Ley de Coulomb .....	21
1.5.1 Propiedades de la fuerza entre dos partículas cargadas....	21
1.5.2 La ley de Coulomb en forma vectorial .....	25
1.6 Ley de Coulomb para conjuntos de partículas cargadas .....	26
1.7 Ejercicios de aplicación .....	29
Capítulo 2. El campo eléctrico .....	57
2.1 Introducción.....	57
2.2 Campo eléctrico .....	57
2.3 Cálculo de campos eléctricos.....	59
2.3.1 Campo de un grupo de cargas puntuales.....	59
2.3.2 Campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico .....	63
2.3.3 Un dipolo en un campo eléctrico .....	67
2.3.4 Campo eléctrico para una distribución lineal de cargas..	68
2.3.5 Campo eléctrico para una distribución superficial de cargas..	69
2.3.6 Campo eléctrico para una distribución volumétrica de cargas..	69
2.4 Representación geométrica del campo eléctrico .....	70
2.5 Ejercicios de aplicación .....	73



## INTRODUCCIÓN

El presente libro, *Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos*, se basa en la experiencia adquirida en las aulas en varias instituciones educativas durante 22 años. Se publica este libro con el único propósito de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos y circuitos eléctricos. En cada capítulo, está incluido el sustento teórico para luego aplicarlo en la resolución de los problemas.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral y álgebra vectorial. La parte teórica presenta los principales aspectos en los que se basa el electromagnetismo, para luego poderlos aplicar en el desarrollo de los problemas, siendo una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

A lo largo de todo el libro, se concede atención a las leyes de: Coulomb, Gauss, Ohm, Kirchhoff, Ampere, Biot-Savart y Lenz. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que se las puede emplear en el estudio de los circuitos eléctricos y magnéticos. A continuación, se hace un resumen de los contenidos de cada capítulo.

El capítulo 1 trata sobre el estudio de las fuerzas eléctricas producidas por cargas estáticas, utilizando la ley de Coulomb; posteriormente, se aplica en el análisis y cálculo de la fuerza que ejercen las cargas puntuales y para distribuciones lineales, superficiales y volumétricas de cargas.

El capítulo 2 trata sobre el estudio de los campos eléctricos producidos por cargas estáticas, las mismas que pueden ser: puntuales, distribuciones lineales, superficiales o volumétricas de cargas. Luego, se procede a calcular el campo eléctrico que ejercen estas cargas en sus alrededores, a una distancia determinada.

En el capítulo 3, se estudia y analiza el campo eléctrico utilizando la ley de Gauss, para luego aplicarla y calcularla en el desarrollo de problemas de campos eléctricos.

El capítulo 4 trata sobre el estudio del potencial eléctrico entre dos puntos situados en un campo eléctrico, que son producidos por cargas eléc-

tricas. Además, se realiza el cálculo del campo eléctrico, a partir del potencial.

En el capítulo 5, se realiza un estudio del condensador, tanto en el vacío como con dieléctricos, y se pone más énfasis en los condensadores de placas planas, esféricas y cilíndricas. Por último, se calculan las capacitancias y la energía almacenada en los condensadores.

El capítulo 6 es un estudio de la corriente eléctrica en el interior de un material conductor y las propiedades de resistencia en la misma. Además, se estudia la ley de Ohm y se desarrollan problemas con esta ley.

En el capítulo 7, se estudia las fuentes generadoras de la energía, con énfasis en la fuente de fuerza electromotriz. Se hace un estudio y análisis de las leyes de Kirchhoff, de voltaje y de corriente. Posteriormente, se aplican en el análisis de circuitos simples y en el cálculo de voltajes, corrientes y potencias en los elementos activos y pasivos.

En el capítulo 8, se realiza el estudio de los campos magnéticos y se procede a calcular la fuerza magnética sobre un alambre conductor producido por un campo magnético externo.

En el capítulo 9, se estudia, analiza y calcula el campo magnético producido por una corriente eléctrica al circular por un alambre conductor, utilizando la ley de Ampere y de Biot-Savart.

Finalmente, en el capítulo 10, se estudia y analiza la ley de inducción de Faraday y la ley de Lenz, las cuales utilizamos para la generación de la fuerza electromotriz inducida en un alambre conductor.

# CAPÍTULO 1

## LEY DE COULOMB

### 1.1 Introducción

La electricidad y el magnetismo se desarrollaron independientemente una del otro hasta 1820, cuando Hans Christian Oersted (1777-1851) observó una relación entre ellos, dando paso a una nueva ciencia denominada *electromagnetismo*; la misma que fue impulsada por varios investigadores tales como: Michael Faraday (1791-1867) o James Clerk Maxwell (1831-1879) (Resnick y Halliday, 1977, p. 803).

### 1.2 Carga eléctrica

Existen dos clases de cargas, positiva y negativa, que describiremos de tres maneras:

- a) Si frotamos con seda una varilla de vidrio, ésta queda cargada positivamente. Entonces, se la cuelga de un hilo largo también de seda, como se ilustra en la figura 1.1, y posteriormente, se frota una segunda varilla de vidrio con seda y se coloca cerca del extremo de la varilla anterior, observamos que las varillas se repelen.

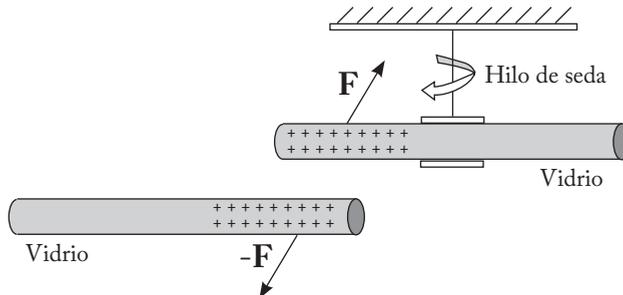


Figura 1.1. Dos varillas de vidrio positivamente cargadas se repelen.

- b) Similar al caso (a), dos varillas de ebonita frotadas con piel se quedan cargadas negativamente; al acercar estas dos varillas de ebonita, que tienen cargas negativas, observamos que se repelen, tal como se muestra en la figura 1.2.

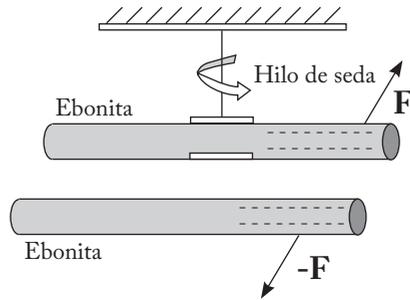


Figura 1.2. Dos varillas de ebonita negativamente cargadas se repelen

- c) Una varilla de ebonita frotada con piel atrae a la varilla de vidrio frotada con seda, tal como se muestra en la figura 1.3.

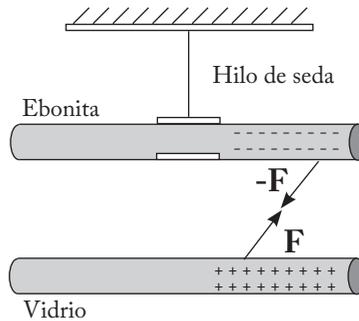


Figura 1.3. Una varilla de ebonita cargada negativamente y una varilla de vidrio cargada positivamente se atraen.

Explicamos estos hechos diciendo que, al frotar con seda una varilla de vidrio se le comunica una *carga eléctrica* de signo positivo y las cargas en las dos varillas ejercen fuerzas de repulsión. Las cargas en el vidrio y

en la ebonita deben ser de diferente signo para que existan fuerzas de atracción.

Benjamín Franklin denominó lo siguiente:

- A la carga que aparece en el vidrio frotado con seda, se llama *carga positiva*.
- A la carga que aparece en la ebonita frotado con piel, se llama *carga negativa*.

**Conclusión:**

Los cuerpos con carga positiva repelen a otros cuerpos con carga positiva, y los cuerpos con carga negativa repelen a otros cuerpos con carga negativa; mientras que un cuerpo que tenga una carga de cualquier signo atrae a otro con una carga de signo opuesto, como se muestra en la figura 1.4.

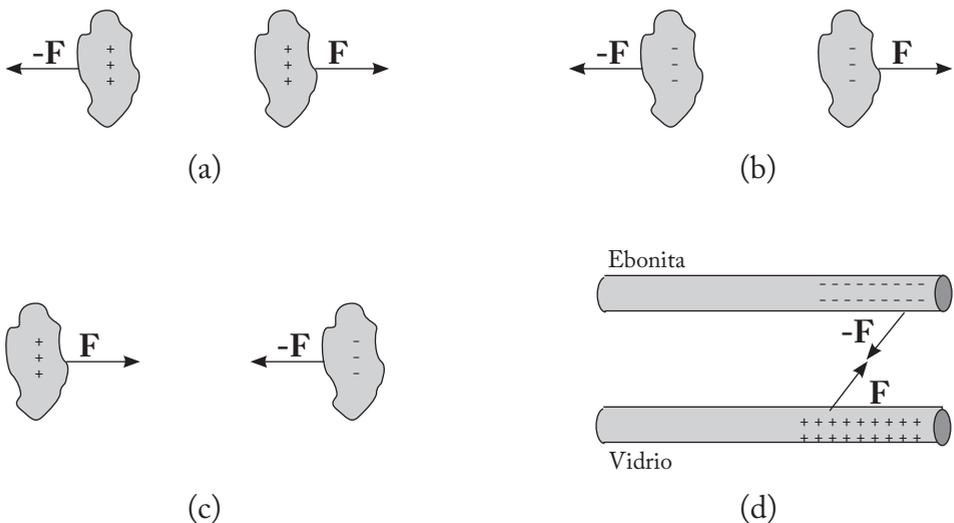


Figura 1.4. a) Dos cuerpos cargados positivamente se repelen.  
 b) Dos cuerpos cargados negativamente se repelen.  
 c) Un cuerpo cargado positivamente y otro negativamente se atraen.  
 d) El vidrio con carga positiva y la ebonita con carga negativa se atraen.

### 1.3 Conductores y aislantes

En los conductores eléctricos, las cargas se pueden mover libremente a través del material, mientras que, en los aislantes, no pueden hacerlo. Los aislantes son llamados también dieléctricos.

**Ejemplos de conductores:** metales, cuerpo humano y la tierra.

**Ejemplos de aislantes:** vidrio, ebonita, plásticos, etc.

Hay una clase de materiales llamados semiconductores, que son lo intermedio entre los conductores y los aisladores.

**Ejemplos de semiconductores:** silicio, germanio, galio, etc.

En los metales, solo la carga negativa se puede mover.

La carga positiva es tan inmóvil como lo es en el vidrio o en cualquier dieléctrico. Los transportadores de cargas en los metales son los electrones libres (electrones de la última capa), tal como se muestra en la figura 1.5.

Los electrones son aquellos que tienen carga negativa y se los representa con el símbolo  $e^-$ .

En algunos conductores, tales como los electrolitos, se pueden mover tanto las cargas positivas como las negativas.

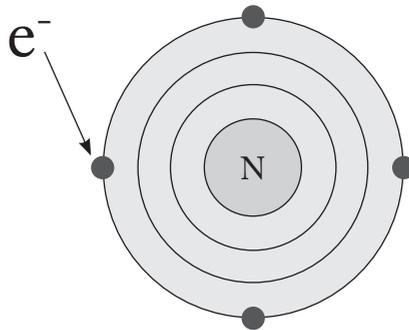


Figura 1.5. El átomo, representación hipotética. N = núcleo,  $e^-$  = electrón

### 1.3.1 Inducción de cargas

La materia en su estado normal o estado neutro contiene cantidades iguales de carga positiva y negativa. Si al material A, que se encuentra en estado neutro, le acercamos una varilla de ebonita (carga negativa), se produce una inducción de cargas (figura 1.6 (a)); esto es, las cargas positivas del material A se atraen con las cargas negativas de la ebonita, y las cargas negativas del material A se repelen a las cargas negativas de la ebonita.

Lo mismo sucede cuando acercamos una varilla de vidrio (carga positiva), como lo indica la figura 1.6 (b), pero en sentido inverso.

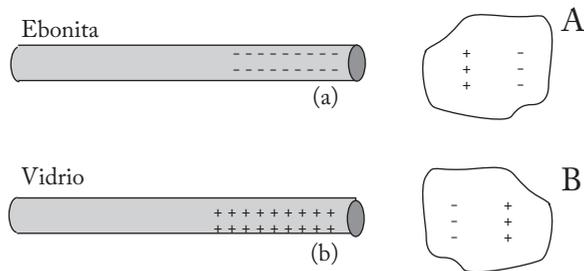


Figura 1.6. Inducción de cargas. (a) Inducción de cargas del material conductor A con una varilla de ebonita cargado negativamente; (b) inducción de cargas del material conductor B con una varilla de vidrio cargado positivamente.

### 1.4 Tierra

Tierra es cuando los electrones del cuerpo C no interfieren en el cuerpo A (figura 1.7), es decir, el exceso de cargas del material A se van a tierra.

**¿Cómo cargar un cuerpo positivamente?** Para cargar un cuerpo positivamente, primero se producen la inducción de cargas (figura 1.6 (a)) y se coloca un material conductor C (tierra) cerca del A (figura 1.7 (a)); luego, se conecta un hilo conductor entre los materiales A y C, las cargas negativas del material A se pasan al material C (figura 1.7 (b)). Posteriormente, se corta el

hilo conductor (figura 1.7 (c)). Después, se retira la barra de ebonita; de esta manera, el cuerpo A queda cargado positivamente (figura 1.7 (d)).

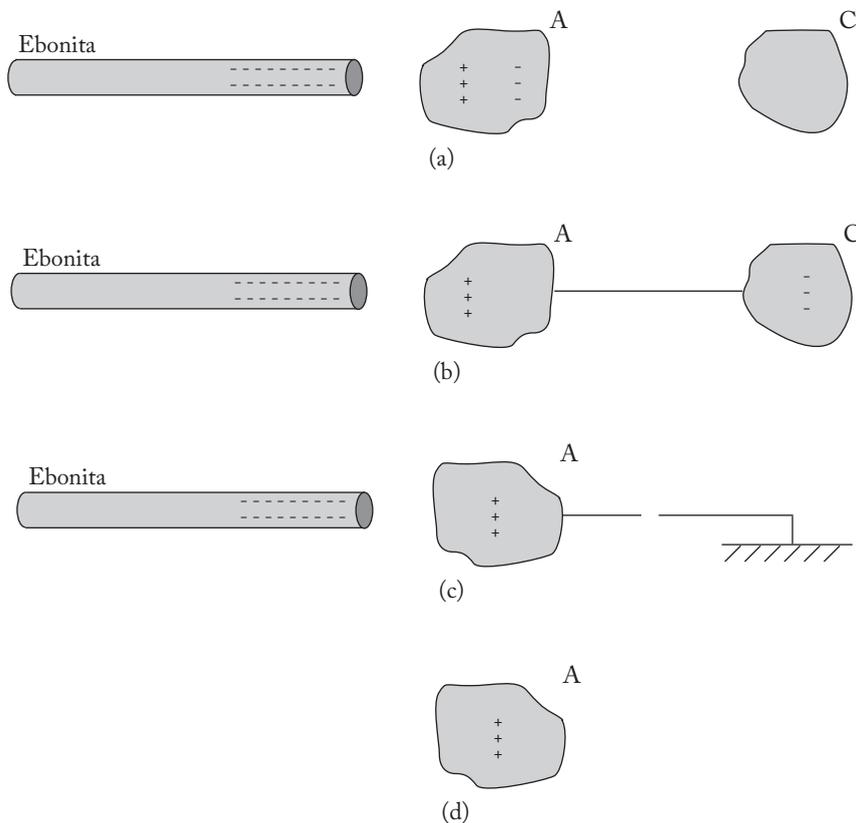


Figura 1.7. Proceso del cargado de un cuerpo positivamente.  
(a) Inducción de cargas del material A con la barra de ebonita y el material C colocado cerca del A, (b) conexión del hilo conductor entre el material A y C, (c) separación (corte) del hilo conductor y (d) material A cargado positivamente.

¿Cómo cargar un cuerpo negativamente? Para cargar un cuerpo negativamente, primero, se produce la inducción de cargas (figura 1.6 (b)) y se coloca un material conductor C (tierra) cerca del B (figura 1.8 (a)); luego, se conecta un hilo conductor entre los materiales B y C, las cargas positivas del material B se trasladan al material C (figura 1.8(b)). Posteriormente, se corta el hilo conductor (figura 1.8 (c)); después, se retira la barra de vidrio, de tal manera que el cuerpo B queda cargado negativamente (figura 1.8 (d)).

## 1.5 Ley de Coulomb

Resnick, Halliday y Krane (2006) sostienen que Charles Augustin Coulomb (1736-1806), en 1785, midió por primera vez cuantitativamente las atracciones y repulsiones eléctricas y dedujo la ley que los rige, utilizando la *balanza de torsión*.

Si el radio  $r$  es mucho menor que la distancia  $d$  que los separa,  $q_1$  y  $q_2$  se les va a llamar partículas y la fuerza ejercida entre las partículas  $q_1$  y  $q_2$  (figura 1.9) son iguales en magnitud, pero con sentido opuesto, independiente de la magnitud de las cargas.

### 1.5.1 Propiedades de la fuerza entre dos partículas cargadas

1. La dirección de la fuerza sigue la línea que las une.
2. La magnitud de la fuerza varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia entre ellas.
3. La fuerza es directamente proporcional a la carga en cada partícula.
4. Para una distancia de separación dada, la magnitud de la fuerza, aunque no su sentido, es independiente del signo de la carga.
5. Las fuerzas entre dos cargas son independientes de la presencia de otras cargas.

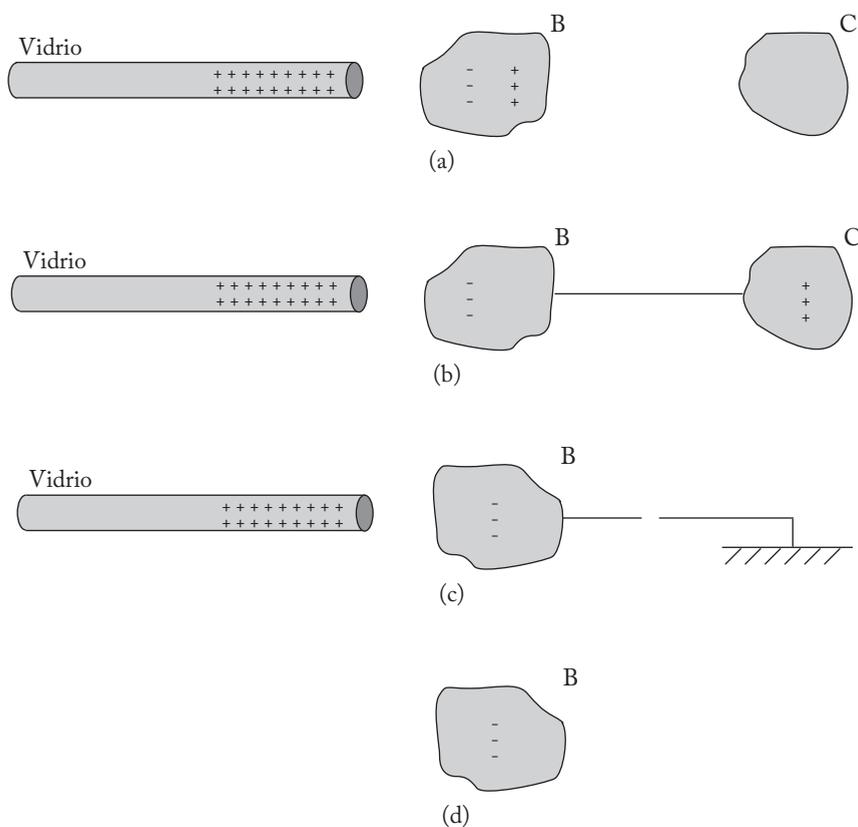


Figura 1.8. Proceso del cargado de un cuerpo negativamente. (a) Inducción de cargas del material B con la barra de vidrio y el material C colocado cerca del B, (b) conexión del hilo conductor entre el material B y C, (c) corte del hilo conductor y (d) material B cargado negativamente.

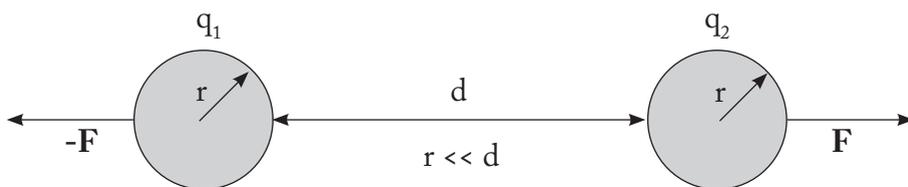


Figura 1.9. Dos partículas ( $q_1$  y  $q_2$ ) separadas una distancia  $d$

Los primeros resultados experimentales de Coulomb pueden representarse tal como lo indica la ecuación (1-1):

$$F \propto \frac{1}{d^2} \quad (1-1)$$

F es la magnitud de la fuerza que obra en cada una de las dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ ; d es la distancia que las separa (figura 1.9). Estas fuerzas actúan en la misma dirección, es decir, en la línea que une las dos cargas, pero apuntan en sentidos contrarios. Nótese que la magnitud de la fuerza en cada carga es la misma, aún cuando las cargas pueden ser muy diferentes (en magnitud y signo).

Coulomb también estudió cómo variaba la fuerza eléctrica con el tamaño relativo de las cargas aplicadas en las esferas de su balanza de torsión. Por ejemplo, si tocamos una esfera conductora B cargada con una esfera conductora C exactamente igual, pero descargada, la carga original debe dividirse igualmente entre las dos esferas (figura 1.10); así se concluye que la fuerza es directamente proporcional al producto de sus cargas, tal como lo indica la ecuación (1-2):

$$F \propto q_1 q_2 \quad (1-2)$$

Considerando las ecuaciones (1-1) y (1-2), obtenemos como resultado la ecuación (1-3):

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (1-3)$$

Para que la ecuación (1-3) sea una igualdad, se introduce una constante de proporcionalidad K, lo que da como resultado la ecuación (1-4), la misma que se denomina Ley de Coulomb.

$$F = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (1-4)$$

En el sistema internacional de unidades (SI), a la constante K se le asigna el valor que se muestra en la ecuación (1-5):

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1-5)$$

Donde  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad en el vacío. Los valores de K y  $\epsilon_0$  son los siguientes:

$$K = 8,9875 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{c}^2}$$

$$\epsilon_0 = 8,85415 \times 10^{-12} \frac{\text{c}^2}{\text{Nm}^2}$$

Si se conectan los extremos de un alambre largo con los terminales de una batería, pasa por el alambre una *corriente eléctrica*  $i$ . Imagine a esa corriente como un flujo de cargas. La unidad mks de corriente es el amperio (A).

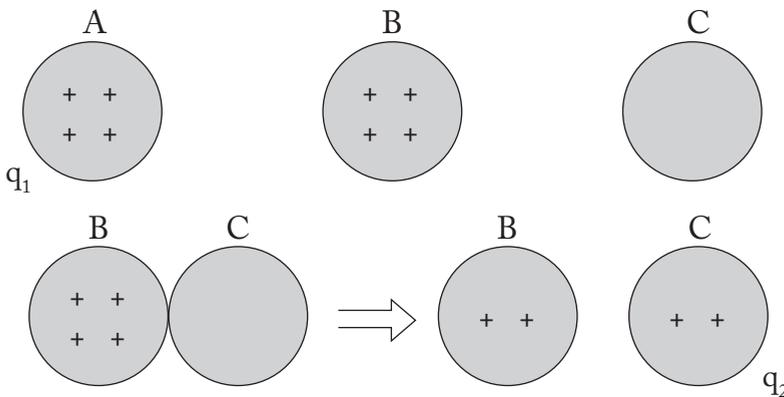


Figura 1.10. Tercera propiedad. Dos esferas conductoras A y B con cargas  $q_1$  y la esfera C descargada, al unirse las dos esferas (B y C), las cargas se reparten en forma igual con cargas  $q_2$ .

La unidad de carga en el sistema mks es el coulomb (coul). Un coulomb se define como la cantidad de carga que pasa por una sección transversal de un alambre, en un segundo, si circula por el alambre una corriente constante de un amperio. La carga se representa en la ecuación (1-6):

$$q = i t \quad (1-6)$$

Donde  $q$  representa la carga en coulomb,  $i$  es la corriente en amperios y  $t$  es el tiempo en segundos. La carga eléctrica del electrón:

$$e^- \equiv \text{carga eléctrica del protón } e^- = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ Coul}$$

### 1.5.2 La ley de Coulomb en forma vectorial

En el gráfico de la figura 1.11, la carga  $q_1$  se encuentra en el origen de las coordenadas rectangulares y la carga  $q_2$  se encuentra a una distancia de radio  $r$ . Entre ellas se produce una fuerza de repulsión  $\mathbf{F}$ , siendo  $\hat{\mathbf{r}}$  un vector unitario. La fuerza en forma vectorial se encuentra representada en la ecuación (1-7):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1-7)$$

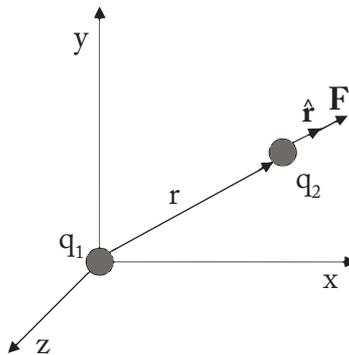


Figura 1.11. Cargas  $q_1$  y  $q_2$  de igual signo, en el espacio tridimensional

## 1.6 Ley de Coulomb para conjuntos de partículas cargadas

La ley de Coulomb se aplica individualmente para cada par de partículas (figura 1.12). Suponiendo que las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  se encuentran en los vértices de un triángulo isósceles ( $r_{12} = r_{13}$ ) y además tienen signos iguales, es posible calcular la fuerza total sobre la carga  $q_1$ , producidas por las cargas  $q_2$  y  $q_3$ . Para dibujar los vectores  $\mathbf{F}_{12}$  y  $\mathbf{F}_{13}$ , utilizamos los signos de las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ .

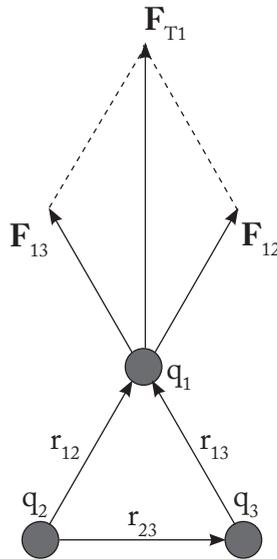


Figura 1.12. Fuerza total sobre la carga  $q_1$ , producidas por las cargas  $q_2$  y  $q_3$

Como los signos de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  son iguales, se produce una fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  de repulsión sobre la carga  $q_1$  y se dibuja en la misma dirección o línea de acción. De igual manera, como los signos de las cargas  $q_1$  y  $q_3$  son iguales, se produce una fuerza  $\mathbf{F}_{13}$  de repulsión sobre la carga  $q_1$  y se dibuja en la misma dirección o línea de acción.

Utilizando el *principio de superposición* sobre la carga 1 tenemos:

$$\mathbf{F}_{T1} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Donde,

$\mathbf{F}_{T1}$  = fuerza total sobre la carga 1

$\mathbf{F}_{12}$  = fuerza producida por la carga 2 sobre la carga 1

$\mathbf{F}_{13}$  = fuerza producida por la carga 3 sobre la carga 1

También podemos representar a la fuerza, con el subíndice de la carga que ejerce la fuerza, esto es:

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13}$$

Para calcular la fuerza total  $\mathbf{F}_{T1}$  que actúa sobre la carga  $q_1$ , en magnitud, dirección y sentido, utilizamos el procedimiento siguiente:

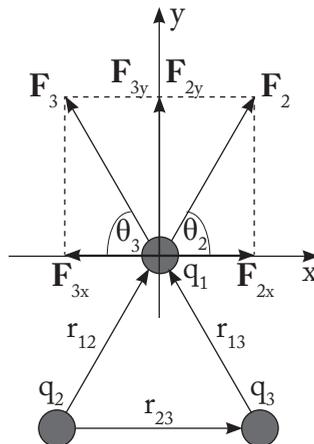


Figura 1.13. Sistema de referencia en la carga  $q_1$

Como queremos calcular la fuerza total  $\mathbf{F}_{T1}$  sobre la carga  $q_1$ , escogemos el sistema de referencia en la carga uno (figura 1.13), y procedemos a descomponer las fuerzas en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas.

Para calcular la magnitud de  $F_{T1}$ , utilizamos las ecuaciones (1-8) y (1-9):

$$\Sigma F_x = F_{Tx} \quad (1-8)$$

$$\Sigma F_y = F_{Ty} \quad (1-9)$$

Utilizando la ecuación (1-8) y la figura 1.13, tenemos:

$$F_{2x} - F_{3x} = F_{Tx}$$

$$F_2 \cos \theta_2 - F_3 \cos \theta_3 = F_{Tx}$$

$$F_2 = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$F_3 = K \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{(r_{23})/2}{r_{12}}$$

$$\theta_3 = \arccos \frac{(r_{23})/2}{r_{13}}$$

Utilizando la ecuación (1-9) y la figura 1.13, tenemos:

$$F_{2y} + F_{3y} = F_{Ty}$$

$$F_2 \text{ Sen } \theta_2 + F_3 \text{ Sen } \theta_3 = F_{Ty}$$

Conociendo  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , podemos calcular  $F_{Tx}$ ,  $F_{Ty}$ ,  $F_{T1}$  y  $\theta_T$ :

$$F_{T1} = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

$$\theta_T = \text{arc Tan } \frac{F_{Ty}}{F_{Tx}}$$

### 1.7 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 1)

**Problema 1.1:** se suspende dos partículas, cada una de ellas con una carga de  $2 \mu\text{C}$  a una distancia de separación de 30 cm, mediante cuerdas aislantes de una longitud de 0.5 m. Se descubre que cada una de las cuerdas forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. Calcular: a) las tensiones de las cuerda, y b) la masa de cada partícula, suponiendo que sean iguales:  $q_1 = q_2 = q = 2 \times 10^{-6}$  coul.

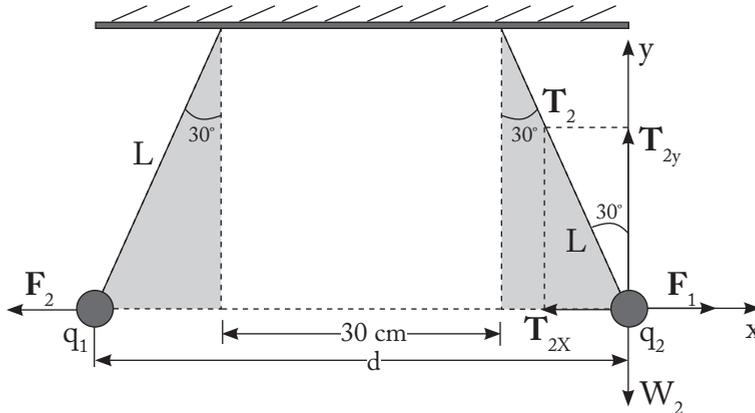


Figura 1.14. Diagrama de fuerzas sobre  $q_2$

*Desarrollo:*

Para calcular los valores de las tensiones y las masas, realizamos el diagrama de cuerpo libre en la carga  $q_2$ , tal como lo muestra la figura 1.14. Se utilizan las ecuaciones (1-8) y (1-9) e, igualando a cero, tenemos:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_1 - T_{2x} = 0$$

$$F_1 - T_2 \text{ Sen } 30^\circ = 0$$

$$T_2 = \frac{F_1}{\text{Sen } 30^\circ} \quad (1-10)$$

Procedemos a calcular la distancia  $d$  entre las dos cargas  $q_1$  y  $q_2$ :

$$d = 0.30 + 2 L \text{ Sen } 30^\circ$$

$$d = 0.30 + (2) (0.5) (0.5)$$

$$d = 0.80 \text{ m}$$

Aplicando la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza entre las dos cargas es:

$$F_1 = K \frac{q_1 q_2}{d^2} = K \frac{q^2}{d^2} = 8.9875 \times 10^9 \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{(0.80)^2} = 0.0562 \text{ N}$$

Reemplazando en la ecuación (1-10), tenemos:

$$T_2 = \frac{F_1}{\text{Sen } 30^\circ} = \frac{0.0562}{0.5} = 0.1124 \text{ N}$$

Debido a que las cargas, las longitudes de las cuerdas y los ángulos son iguales, podemos concluir que:

$$T_1 = T_2 = 0.1124 \text{ N}$$

$$m_1 = m_2$$

Realizando la sumatoria en la componente de las ordenadas, tenemos:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_{2y} - W_2 = 0$$

$$T_2 \cos 30^\circ - m_2 g = 0$$

$$m_2 = \frac{T_2 \cos 30^\circ}{g} = \frac{(0,1124)(\cos 30^\circ)}{9,8} = 9,933 \times 10^{-3} \text{ Kg}$$

De esta manera se han obtenido los resultados de los literales a) y b), esto es,

$$\text{a) } T_1 = T_2 = 0.1124 \text{ N}$$

$$\text{b) } m_1 = m_2 = 9.933 \times 10^{-3} \text{ Kg}$$

**Problema 1.2:** “Los protones de los rayos cósmicos llegan a la atmósfera superior de la Tierra (figura 1.15) a razón de 0.15 protones/cm<sup>2</sup>-seg, promediando toda la superficie. ¿Qué cantidad total de corriente recibe la Tierra de fuera de su atmósfera en forma de protones de radiación cósmica incidente? El radio de la Tierra es de  $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 821).

*Solución:*

La superficie S de la esfera está dada por  $S = 4\pi R^2$ . La Tierra recibe los rayos cósmicos.

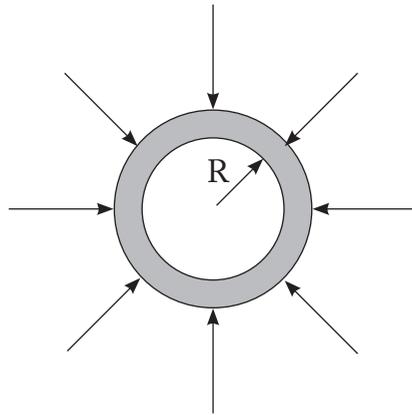


Figura 1.15. Protones sobre la superficie de la Tierra

$$\left(\frac{0.15 \text{ protones}}{\text{cm}^2 - \text{seg}}\right) (\text{superficie de la Tierra})$$

$$\left(\frac{0.15 \text{ protones}}{\text{cm}^2 - \text{seg}}\right) (4\pi R^2)$$

$$\left(\frac{0.15 \text{ protones}}{\text{cm}^2 - \text{seg}}\right) 4\pi(6.4 \times 10^8 \text{ cm})^2 = 7.72078 \times 10^{17}$$

$$= 7,72078 \times 10^{17} \text{ protones/seg}$$

Como un protón tiene una carga eléctrica de  $1.6 \times 10^{-19}$  coul, la Tierra recibirá de los rayos cósmicos la corriente siguiente:

$$q = it, \text{ entonces, } i = \frac{q}{t}$$

$$i = 7.72078 \times 10^{17} \frac{\text{protones}}{\text{seg}} \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ coul}}{1 \text{ protón}}$$

$$i = 0,1235 \text{ coul/seg}$$

$$i = 0,1235 \text{ A}$$

**Problema 1.3:** “Dos bolas similares de masa  $m$  se cuelgan de hilos de seda de longitud  $L$  y llevan cargas similares  $q$  como se muestra en la figura 1.16. Supóngase que  $\theta$  es tan pequeño que  $\tan \theta$  puede reemplazarse por  $\text{Sen } \theta$  por ser aproximadamente igual. Haciendo esta aproximación, demostrar que:

$$x = \left( \frac{q^2 L}{2 \pi \epsilon_0 m g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Siendo  $x$  la separación entre las bolas. Si  $L = 120 \text{ cm}$ ,  $m = 10\text{g}$  y  $x = 5,0 \text{ cm}$ , ¿cuánto vale  $q$ ?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 821).

*Solución:*

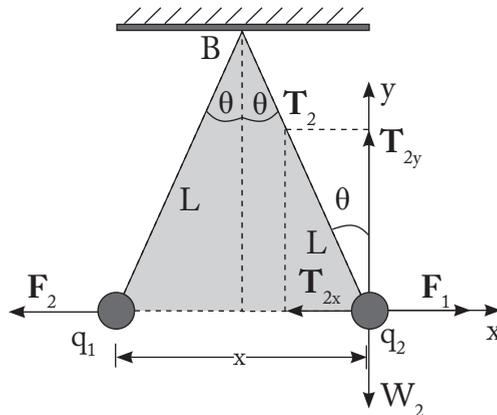


Figura 1.16. Diagrama de fuerzas sobre la carga  $q_2$

Debido a los datos del problema,  $q_1 = q_2 = q$ , entonces  $m_1 = m_2 = m$ , también  $F_1 = F_2 = F$ .

Procedemos a realizar el diagrama de cuerpo libre en la carga  $q_2$ , tal como lo muestra la figura 1.16, se utilizan las ecuaciones (1-8) y (1-9) e igualando a cero, tenemos:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ F_1 - T_{2x} &= 0 \\ F_1 - T_2 \text{ Sen } \theta &= 0 \\ T_2 &= \frac{F_1}{\text{Sen } \theta}\end{aligned}\tag{1-11}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ T_{2y} - W_2 &= 0 \\ T_2 \text{ Cos } \theta - m_2 g &= 0 \\ T_2 &= \frac{m_2 g}{\text{Cos } \theta}\end{aligned}\tag{1-12}$$

Igualando las ecuaciones (1-11) y (1-12), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{F_1}{\text{Sen } \theta} = \frac{m_2 g}{\text{Cos } \theta} &\rightarrow \frac{F}{\text{Sen } \theta} = \frac{m g}{\text{Cos } \theta} \rightarrow F = mg \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta} = mg \text{ Tan } \theta = mg \text{ Sen } \theta \\ F &= mg \text{ sen } \theta\end{aligned}\tag{1-13}$$

Donde:  $\text{Tan } \theta$  es igual al  $\text{Sen } \theta$  por dato del problema. En el triángulo  $ABq_2$  (figura 1.16), tenemos:

$$\text{Sen } \theta = \frac{x/2}{L}\tag{1-14}$$

Reemplazando (1-14) en (1-13), tenemos:

$$F = mg \frac{x}{2L} \quad (1-15)$$

Utilizando la ley de Coulomb para calcular la magnitud de la fuerza, tenemos:

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} \quad (1-16)$$

$$(1-15) = (1-16)$$

$$mg \frac{x}{2L} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{2L}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{mg}$$

$$x = \left( \frac{q^2 L}{2 \pi \epsilon_0 m g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1-17)$$

Con lo cual, queda demostrado el valor de x del problema. De la ecuación (1-17) despejamos la variable q y reemplazamos los datos del ejemplo:

$$q = \left( \frac{2\pi\epsilon_0 mgx^3}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q = \left( \frac{2\pi\epsilon_0 (0.01)(9.8)(0.05)^3}{1.20} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}$$

$$q = \pm 2.3893 \times 10^{-8} \text{ coul}$$

$$q = \pm 2.4 \times 10^{-8} \text{ coul}$$

**Problema 1.4:** “Suponga que cada bola del problema 1.3 pierde carga a razón de  $1.0 \times 10^{-9}$  coul/seg. ¿Con qué velocidad instantánea relativa ( $= dx/dt$ ) se acercan las bolas entre sí?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 821).

*Solución:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dq} \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = 1.0 \times 10^{-9} \text{ coul/seg}$$

Considerando la ecuación (1-17), derivamos con respecto a  $q$ , esto es ( $dx / dq$ ).

$$x = \left( \frac{q^2 L}{2 \pi \epsilon_0 m g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dq} = \frac{1}{3} \left( \frac{q^2 L}{2 \pi \epsilon_0 m g} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{2qL}{2 \pi \epsilon_0 m g}$$

$$\frac{dx}{dq} = \frac{1}{3} \left( \frac{(2.4 \times 10^{-8})^2 (1.2)}{2 \pi (8.9 \times 10^{-12})(0.01)(9.8)} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2(2.4 \times 10^{-8})(1.2)}{2 \pi (8.9 \times 10^{-12})(0.01)(9.8)} \right)$$

$$\frac{dx}{dq} = 1393050.174$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dq} \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = (1393050.174)(1.0 \times 10^{-9})$$

$$\frac{dx}{dt} = 1393 \times 10^{-3} \text{ m/seg}$$

**Problema 1.5:** “Tres bolitas (figura 1.7), cada una de masa 10 g se cuelgan separadamente de un mismo punto mediante hilos de seda, cada uno de 1,0 m de largo. Las bolitas tienen exactamente la misma carga y quedan suspendidos en los vértices de un triángulo equilátero de 0.1 m de largo cada lado. ¿Cuál es la carga que tiene cada bola?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 821).

*Solución:*

La figura 1,17 muestra un sistema tridimensional de coordenadas x, y, z. El diagrama de cuerpo libre lo realizamos sobre la carga  $q_2$ . Las tres cargas son iguales, esto es,  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ . Para dibujar los vectores de las fuerzas, hacemos uso de los signos de las cargas; en este caso, las tres cargas tienen signos iguales, por lo tanto existen fuerzas de repulsión.  $\mathbf{F}_{12}$  es la fuerza producida por la carga  $q_1$  sobre la carga  $q_2$ ;  $\mathbf{F}_{32}$  es la fuerza producida por la carga  $q_3$  sobre la carga  $q_2$ .  $\mathbf{F}_R$  es la fuerza eléctrica resultante sobre la carga  $q_2$ .

Debido a que las tres cargas están en el vértice de un triángulo equilátero, las bisectrices divide a cada lado del triángulo en dos partes iguales ( $r/2$ ), siendo  $r$  los lados del triángulo equilátero; también la bisectriz divide en dos ángulos iguales de  $30^\circ$  cada uno.

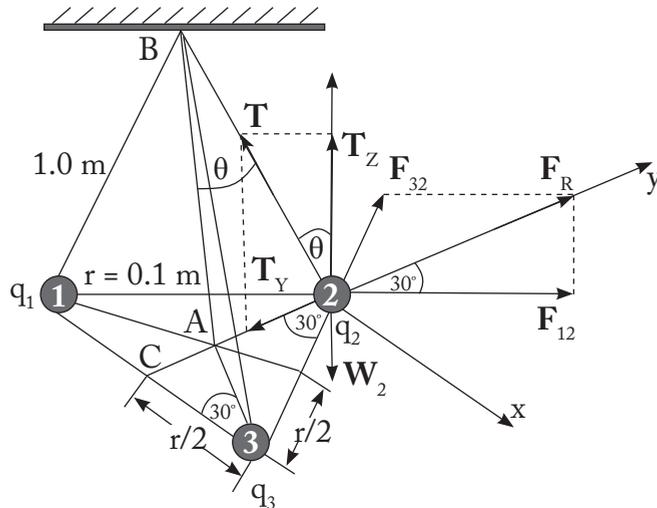


Figura 1.17. Diagrama de cuerpo libre sobre la carga  $q_2$

De la figura 1.17, sacamos una parte del gráfico que lo representamos en la figura 1.18 y, utilizando la ecuación (1-8), tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_{Tx} \\ - F_{32x} + F_{12x} &= F_{Tx} \\ - F_{32} \text{ Sen } 30^\circ + F_{12} \text{ Sen } 30^\circ &= F_{Tx} \\ q_1 = q_2 = q_3 &= q \\ F_{32} &= F_{12} \\ - F_{12} \text{ Sen } 30^\circ + F_{12} \text{ Sen } 30^\circ &= F_{Tx} \\ F_{Tx} &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (1-9), tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= F_{Ty} \\ F_{12y} + F_{32y} &= F_{Ty} \\ F_{12} \text{ Cos } 30^\circ + F_{32} \text{ Cos } 30^\circ &= F_{Ty} \\ F_{32} &= F_{12} \\ F_{12} \text{ Cos } 30^\circ + F_{12} \text{ Cos } 30^\circ &= F_{Ty} \\ 2 F_{12} \text{ Cos } 30^\circ &= F_{Ty} \end{aligned}$$

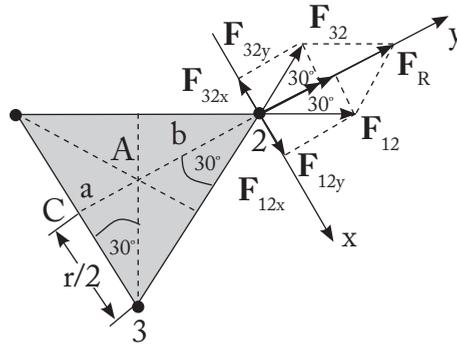


Figura 1.18. Diagrama de fuerzas en el plano de las cargas

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} = K \frac{q^2}{r^2}$$

$$F_{Ty} = 2K \frac{q^2}{r^2} \cos 30^\circ$$

$$F_R = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

$$F_R = \sqrt{0 + F_{Ty}^2} = F_{Ty} = 2K \frac{q^2}{r^2} \cos 30^\circ$$

$$F_R = 2K \frac{q^2}{r^2} \cos 30^\circ \quad (1-18)$$

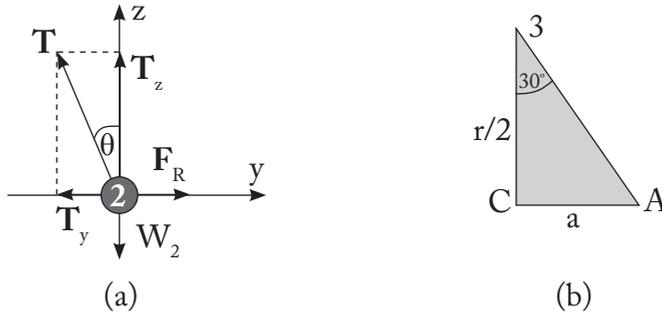


Figura 1.19. (a) y (b) son partes de las figuras 1.17 y 1.18.

En la figura 1.19, realizamos la sumatoria de las componentes de las abscisas y de las ordenadas:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= 0 \\
 F_R - T_y &= 0 \\
 F_R - T \text{ Sen } \theta &= 0 \\
 T \text{ Sen } \theta &= F_R
 \end{aligned} \tag{1-19}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_z &= 0 \\
 T_z - W_2 &= 0 \\
 T \text{ Cos } \theta &= m_2 g
 \end{aligned} \tag{1-20}$$

Dividiendo la ecuación (1-19) para la ecuación (1-20), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{T \text{ Sen } \theta}{T \text{ Cos } \theta} &= \frac{F_R}{m_2 g} \\
 \text{Tan } \theta &= \frac{F_R}{m_2 g} \\
 F_R &= m_2 g \text{ Tan } \theta
 \end{aligned} \tag{1-21}$$

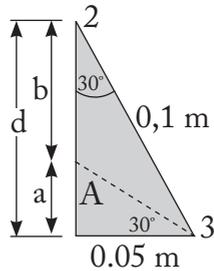
En la figura 1.19 (b), calculamos el valor de a:

$$\frac{r}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ m}$$

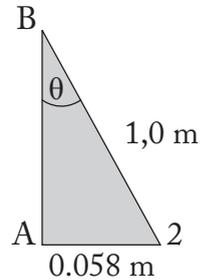
$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{a}{0.05}$$

$$a = 0.05 \text{ Tan } 30^\circ$$

$$a = 0.029 \text{ m}$$



(a)



(b)

Figura 1.20. (a) De la figura 1.18, (b) de la figura 1.17

En la figura 1.20 (a), calculamos el valor de b:

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{d}{0.1}$$

$$d = 0.1 \text{ Cos } 30^\circ$$

$$d = 0.0866 \text{ m}$$

$$b = d - a$$

$$b = 0.0866 - 0.029 = 0.058 \text{ m}$$

En la figura 1.20 (b), calculamos el valor de  $\theta$ :

$$\text{Sen } \theta = \frac{0,058}{1,0}$$

$$\theta = \text{arc Sen } 0,058 = 3,325^\circ$$

Igualando las ecuaciones (1-18) y (1-21), tenemos:

$$2K \frac{q^2}{r^2} \text{Cos } 30^\circ = m_2 g \text{Tan } \theta$$

Como las cargas son iguales, entonces:  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ .

$$q^2 = \frac{r^2 mg \text{Tan } \theta}{2K \text{Cos } 30^\circ}$$

$$q = \sqrt{\frac{r^2 mg \text{Tan } \theta}{2K \text{Cos } 30^\circ}}$$

$$q = \sqrt{\frac{(0.1)^2 (0.01)(9.8) \text{Tan } 3.325^\circ}{2(9 \times 10^9) \text{Cos } 30^\circ}} = 6.0435 \times 10^{-8} \text{ coul}$$

$$q = 6.0435 \times 10^{-8} \text{ coul}$$

**Problema 1.6:** “En la figura 1.21, ¿cuál es la fuerza resultante sobre la carga colocada en el vértice inferior izquierdo del cuadrado? Tome como valores  $q = 1,0 \times 10^{-7}$  coul, y  $a = 5,0$  cm” (Resnick y Halliday, 1977, p. 822).

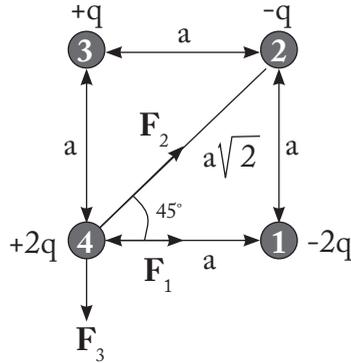


Figura 1.21. Diagrama de fuerzas sobre la carga 4

*Solución:*

El problema nos pide calcular la fuerza resultante sobre la carga colocada en el vértice inferior izquierdo del cuadrado, esto es, sobre la carga 4. En la figura 1.21,  $q_1 = -2q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $q_3 = +q$  y  $q_4 = +2q$ ; dibujamos las fuerzas que actúan sobre la carga 4 y como resultado tenemos lo siguiente:  $\mathbf{F}_1$  es la fuerza que ejerce la carga 1 sobre la carga 4.  $\mathbf{F}_2$  es la fuerza que ejerce la carga 2 sobre la carga 4, finalmente  $\mathbf{F}_3$  es la fuerza que ejerce la carga 3 sobre la carga 4. Dibujamos el sistema de referencia sobre la carga 4 y lo representamos en la figura 1.22.

En la figura 1.22, realizamos la sumatoria de los componentes de las abscisas y de las ordenadas.

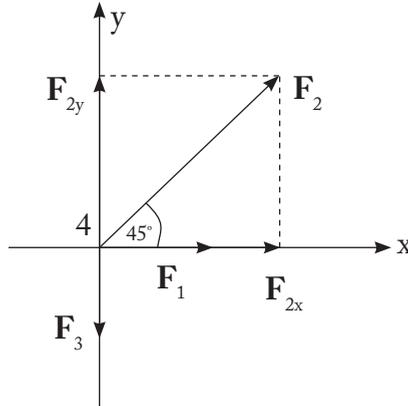


Figura 1.22. Sistema de referencia sobre la carga 4

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= F_{Tx} \\
 F_1 + F_{2x} &= F_{Tx} \\
 F_1 + F_2 \cos 45^\circ &= F_{Tx}
 \end{aligned} \tag{1-22}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= F_{Ty} \\
 F_{2y} - F_3 &= F_{Ty} \\
 F_2 \sin 45^\circ - F_3 &= F_{Ty}
 \end{aligned} \tag{1-23}$$

$$F_1 = K \frac{q_1 q_4}{a^2} = K \frac{(2q)(2q)}{a^2} = 4K \frac{q^2}{a^2}$$

$$F_2 = K \frac{q_2 q_4}{(a\sqrt{2})^2} = K \frac{(q)(2q)}{2a^2} = K \frac{q^2}{a^2}$$

$$F_3 = K \frac{q_3 q_4}{a^2} = K \frac{(q)(2q)}{a^2} = 2K \frac{q^2}{a^2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando los valores en la ecuación (1-22) y (1-23), tenemos:

$$F_{Tx} = 4K \frac{q^2}{a^2} + K \frac{q^2}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_{Tx} = K \frac{q^2}{a^2} (4 + \sqrt{2}/2) = (9 \times 10^9) \frac{(1.0 \times 10^{-7})^2}{(0.05)^2} (4 + \sqrt{2}/2) = 0.169455844 \text{ N} \quad (1-24)$$

$$F_{Ty} = K \frac{q^2}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2K \frac{q^2}{a^2}$$

$$F_{Ty} = K \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) = (9 \times 10^9) \frac{(1.0 \times 10^{-7})^2}{(0.05)^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) = -0.046544155 \text{ N} \quad (1-25)$$

Con las ecuaciones (1-24) y (1-25), calculamos la fuerza total sobre la carga 4:

$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

$$F_T = \sqrt{(0.169455844)^2 + (0.046544155)^2} = 0.175731731$$

$$F_T = 1.76 \times 10^{-1} \text{ N}$$

**Problema 1.7:** “Una carga  $Q$  se coloca en cada uno de los dos vértices opuestos de un cuadrado (figura 1.23). Una carga  $q$  se coloca en cada uno de los otros dos vértices. a) Si la fuerza eléctrica resultante sobre  $Q$  es cero, ¿cómo están relacionados  $q$  y  $Q$ ? b) ¿Podría escogerse a  $q$  de tal manera que la fuerza resultante en todas las cargas valiera cero?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 822).

*Solución:*

En la figura 1.23, la carga 1 es la que se encuentra en el vértice inferior izquierdo, la carga 2 es la que se encuentra en el vértice superior derecho, la carga 3 es la que se encuentra en el vértice superior izquierdo y la carga 4 es la que se encuentra en el vértice inferior derecho sobre el cual se dibuja el diagrama de fuerzas, considerando las cargas  $q$  y  $Q$  de igual signo. Posteriormente, en la figura 1.24, se realiza el sistema de referencia y se descomponen las fuerzas en el eje  $x$  y en el eje  $y$ ; utilizando las ecuaciones (1-8) y (1-9), realizamos la sumatoria de las componentes de las abscisas y de las ordenadas. Esto es:

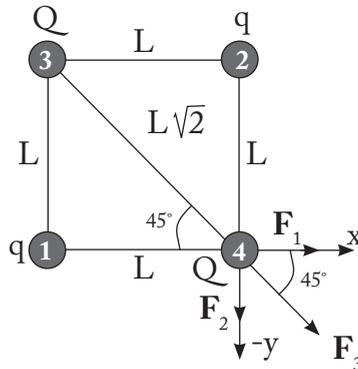


Figura 1.23. Diagrama de fuerzas sobre la carga inferior derecha

$$\begin{aligned}\Sigma F_X &= F_{Tx} \\ F_1 + F_{3x} &= F_{Tx} \\ F_1 + F_3 \text{Cos } 45^\circ &= F_{Tx}\end{aligned}\quad (1-26)$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= F_{Ty} \\ -F_{3y} - F_2 &= F_{Ty} \\ -F_3 \text{Sen } 45^\circ - F_2 &= F_{Ty}\end{aligned}\quad (1-27)$$

Para hallar las magnitudes de  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , aplicamos la ley de Coulomb:

$$F_1 = K \frac{q_1 q_4}{L^2} = K \frac{(q)(Q)}{L^2} = K \frac{qQ}{L^2}$$

$$F_2 = K \frac{q_2 q_4}{L^2} = K \frac{(q)(Q)}{L^2} = K \frac{qQ}{L^2}$$

$$F_3 = K \frac{q_3 q_4}{(L\sqrt{2})^2} = K \frac{(Q)(Q)}{(L\sqrt{2})^2} = K \frac{Q^2}{2L^2}$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{Sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando los valores en la ecuación (1-26) y (1-27), tenemos:

$$F_{Tx} = K \frac{qQ}{L^2} + K \frac{Q^2}{2L^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = K \frac{Q}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad (1-28)$$

$$F_{Ty} = -K \frac{Q^2}{2L^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - K \frac{qQ}{L^2} = -K \frac{Q}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad (1-29)$$

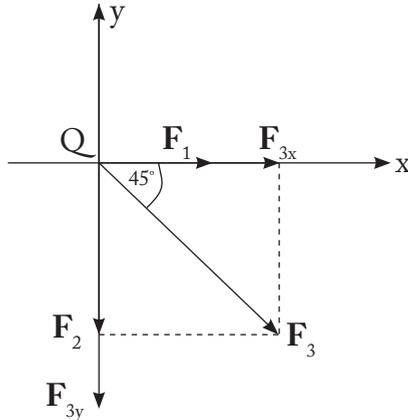


Figura 1.24. Sistema de referencia sobre la carga Q

Con las ecuaciones (1-28) y (1-29), calculamos la fuerza total sobre la carga Q:

$$F_R = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

$$F_R = (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{KQ}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right)^2 + \left( -\frac{KQ}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$F_R = \left[ 2 \left( \frac{KQ}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$F_R = \sqrt{2} \frac{KQ}{L^2} \left( q + Q \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0$$

$F_R = 0$ , debido al dato del problema.

$$q = -Q \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Q = -\frac{4}{\sqrt{2}} q$$

- a)  $Q = -2\sqrt{2} q$
- b) No puede escogerse a  $q$  de tal manera que la fuerza resultante en todas las cargas valga cero, porque, cuando se hace el diagrama de fuerzas sobre la carga  $q$ , los resultados son diferentes que cuando se hace el diagrama de fuerzas sobre la carga  $Q$ .

**Problema 1.8:** “Una cierta carga  $Q$  se va a dividir en dos partes,  $q$  y  $Q-q$  (figura 1.25). ¿Cuál es la relación de  $Q$  a  $q$  si las dos partes, separadas una cierta distancia, deben producir una máxima repulsión coulombiana entre sí?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 822).

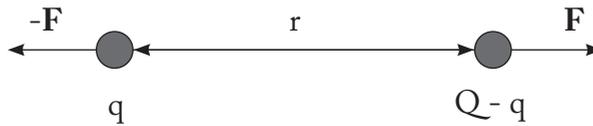


Figura 1.25. Carga  $Q$  dividida en dos partes

Las cargas  $q$  y  $Q-q$  son de igual signo, por tanto, la fuerza  $F$  que actúa sobre las cargas es de repulsión. Para calcular la magnitud de la fuerza  $F$ , utilizamos la ley de Coulomb; y para calcular la máxima repulsión, la fuerza derivamos con respecto a la carga  $q$  e igualamos a cero; esto es:

$$F = k \frac{q(Q-q)}{r^2} = k \frac{qQ - q^2}{r^2}$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{k}{r^2} (Q - 2q)$$

$$\text{Para que } F \text{ sea máxima, } \frac{dF}{dq} = 0$$

$$0 = \frac{k}{r^2}(Q - 2q)$$

$$Q - 2q = 0$$

$$Q = 2q \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{q} = 2$$

**Problema 1.9:** “Se tienen dos pequeñas esferas cargadas positivamente (figura 1.26). La suma de las cargas que contienen es de  $5,0 \times 10^{-5}$  coul. Si la fuerza de repulsión entre las dos esferas es de 1.0 newton cuando se encuentran separadas 2.0 m, ¿cómo está distribuida la carga total entre las esferas?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 822).

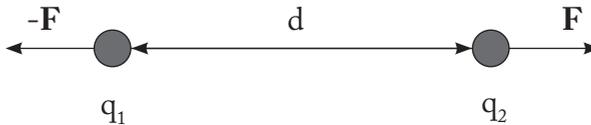


Figura 1.26. Esferas con cargas  $q_1$  y  $q_2$

Datos:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 5,0 \times 10^{-5} \text{ coul} \\ F &= 1,0 \text{ N, } d = 2,0 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-30)$$

*Solución:*

Utilizamos la ley de Coulomb para calcular la magnitud de la fuerza  $F$ ; esto es:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Despejando  $q_1 q_2$  y reemplazando los datos del problema, tenemos:

$$q_1 q_2 = \frac{Fd^2}{k}$$

$$q_1 q_2 = \frac{(1.0)(2.0)^2}{9 \times 10^9}$$

$$q_1 q_2 = 4.44 \times 10^{-10}$$

$$q_2 = \frac{4.444 \times 10^{-10}}{q_1} \tag{1-31}$$

(1-31) en (1-30):

$$q_1 + \frac{4.444 \times 10^{-10}}{q_1} = 5.0 \times 10^{-5}$$

$$q_1^2 + 4.44 \times 10^{-10} = 5.0 \times 10^{-5} q_1$$

$$q_1^2 - 5.0 \times 10^{-5} q_1 + 4.444 \times 10^{-10} = 0$$

$$q_1 = \frac{5.0 \times 10^{-5} \pm \sqrt{(5.0 \times 10^{-5})^2 - 4(4.444 \times 10^{-10})}}{2}$$

$$q_1 = \frac{5.0 \times 10^{-5} \pm 2.69 \times 10^{-5}}{2}$$

De tal forma que  $q_1$  tiene dos respuestas; esto es:

$$q_1 = 3.8 \times 10^{-5} \text{ coul} \quad \longrightarrow \quad q_2 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ coul}$$

$$q_1 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ coul} \quad \longrightarrow \quad q_2 = 3.8 \times 10^{-5} \text{ coul}$$

**Problema 1.10:** “Dos cargas punto positivas iguales están separadas una distancia  $2a$  (figura 1.27). Una carga punto de prueba se sitúa en un plano normal a la línea que une esas cargas y a la mitad entre ellas. a) Calcular el radio  $r$  del círculo de simetría en este plano, para el cual su fuerza sobre la carga de prueba tiene un valor máximo. b) ¿Cuál es la dirección de esta fuerza considerando que la carga de prueba es positiva?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 822).

*Solución:*

Sobre la carga  $q_0^+$ , dibujamos las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  que producen las cargas 1 y 2 (ver figura 1.27). Trazamos el sistema de referencia en la carga  $q_0^+$  y dibujamos las fuerzas en los componentes  $x$  y  $y$  que lo representamos en la figura 1.28. Utilizando las ecuaciones (1-8) y (1-9), realizamos la sumatoria de las componentes de las abscisas y de las ordenadas. Esto es:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_{Tx} \\ -F_{1x} + F_{2x} &= F_{Tx} \\ -F_1 \text{ Sen } \theta + F_2 \text{ Sen } \theta &= F_{Tx} \end{aligned}$$

$F_1 = F_2$ , debido a que las cargas 1 y 2 son iguales y además la carga  $q_0^+$  está en el vértice de un triángulo isósceles, entonces la fuerza total en el eje  $x$  es cero. Esto es:

$$F_{Tx} = 0 \tag{1-32}$$

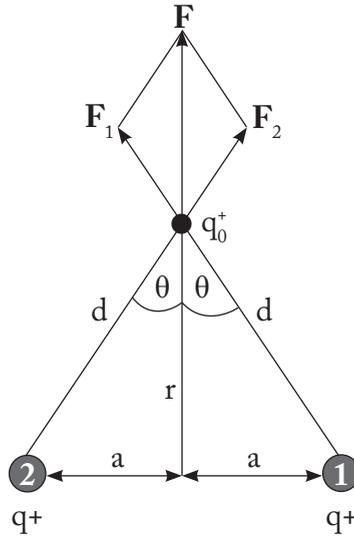


Figura 1.27. Diagrama de fuerzas en el punto de  $q_0^+$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= F_{Ty} \\ F_{1y} + F_{2y} &= F_{Ty} \\ F_1 \cos \theta + F_2 \cos \theta &= F_{Ty} \\ (F_1 + F_2) \cos \theta &= F_{Ty} \end{aligned}$$

$$2F_1 \cos \theta = F_{Ty} \quad (1-33)$$

En la figura 1.27:  $d = \sqrt{a^2 + r^2}$  ;  $\cos \theta = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$

$$F_1 = K \frac{(q)(q_0^+)}{d^2} = K \frac{qq_0^+}{a^2 + r^2}$$

Reemplazando en la ecuación (1-33), tenemos:

$$F_{Ty} = 2K \frac{qq_0^+}{a^2 + r^2} \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{2Kqq_0^+ r}{\sqrt{(a^2 + r^2)^2}}$$

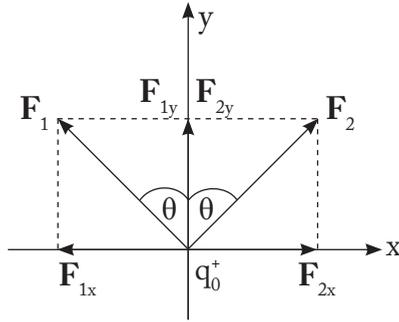


Figura 1.28. Sistema de referencia en  $q_0^+$

$$F = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = \sqrt{0 + F_{Ty}^2} = F_{Ty} = \frac{2Kq_0^+ r}{\sqrt[3]{(a^2 + r^2)^2}}$$

$$F(r) = \frac{2Kq_0^+ r}{\sqrt[3]{(a^2 + r^2)^2}}$$

$$F(r) = 2 kq_0^+ r(a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Para que la fuerza sea máxima, debemos derivar  $F(r)$  con respecto al radio e igualar a cero; esto es:

$$\frac{dF}{dr} = 2 kq_0^+ \left[ r \left( -\frac{3}{2} \right) (a^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}} (2r) + (a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$\frac{dF}{dr} = 0$$

$$-3r^2 (a^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}} + (a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{3r^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$3r^2 = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}} (a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} = a^2 + r^2$$

$$3r^2 = a^2 + r^2$$

$$3r^2 - r^2 = a^2$$

$$2r^2 = a^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.71 a$$

b) La dirección de la fuerza se encuentra en la figura 1.29, ya que, de acuerdo a la figura 1.28:

$$\tan \theta = \frac{F_{Tx}}{F_{Ty}} = \frac{0}{F_{Ty}} = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

Entonces, se tiene un ángulo de  $0^\circ$  con respecto al eje de las  $y$ ; por lo tanto un ángulo de  $90^\circ$  con respecto al eje de las  $x$ .

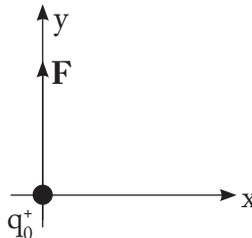


Figura 1.29. Fuerza resultante sobre el eje  $y$



## CAPÍTULO 2 EL CAMPO ELÉCTRICO

### 2.1 Introducción

A cada punto en el espacio cerca de la Tierra podemos asociarle un vector intensidad de campo gravitacional  $\mathbf{g}$ ; este vector es la aceleración gravitacional que adquiriría un cuerpo de prueba, que se colocara en este punto y se soltara. Si  $m$  es la masa del cuerpo y  $\mathbf{F}$  la fuerza gravitacional que obra sobre él,  $\mathbf{g}$  está dado por la expresión:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$$

Para puntos cercanos a la superficie de la Tierra, a menudo se considera el campo como uniforme; esto es,  $\mathbf{g}$  es el mismo para todos los puntos.

El espacio que rodea una varilla cargada parece estar afectado por la varilla y a este espacio lo llamamos campo eléctrico. De la misma manera hablamos de un campo magnético en el espacio que rodea a un imán recto. En la teoría del electromagnetismo clásico, los conceptos de *campo eléctrico* y *campo magnético* son fundamentales (Resnick y Halliday, 1977, pp. 823-824).

### 2.2 Campo eléctrico

Para definir operacionalmente el campo eléctrico, colocamos un pequeño cuerpo de prueba que tenga una carga  $q_0$  (supuesta positiva) en el punto de espacio que se va a examinar, y medimos la fuerza eléctrica  $\mathbf{F}$  (si acaso hay alguna) que actúe sobre ese cuerpo. La intensidad del *campo eléctrico*  $\mathbf{E}$  en el punto se define de la siguiente manera:

Si en cierto punto, una diminuta carga eléctrica positiva (carga de prueba  $q_0^+$ ) experimenta la acción de una fuerza de origen eléctrico, se dice que en ese punto existe un campo eléctrico, tal como se muestra en la figura

2.1. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se lo mide por la fuerza  $\mathbf{F}$ , que experimenta la carga en un punto  $p$ , esto es,

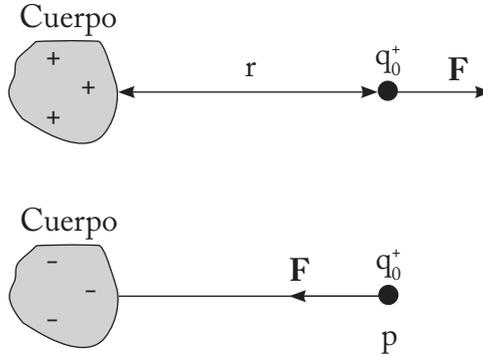


Figura 2.1. La carga experimenta una fuerza de atracción o repulsión en el punto  $p$ .

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0^+}, \text{ siendo newton sobre coulomb (N/C) la unidad del campo}$$

eléctrico. ; también, la unidad más conocida del campo eléctrico es voltios sobre metros (V/m). La carga tiene que ser muy pequeña para detectar el campo eléctrico producido por un cuerpo; entonces, el campo eléctrico se define como el que se muestra en la ecuación (2-1).

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0^+} \quad (2-1)$$

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es un vector y tiene la misma dirección y sentido del vector fuerza eléctrica  $\mathbf{F}$ , ya que  $q_0^+$  es un escalar.

## 2.3 Cálculo de campos eléctricos

### 2.3.1 Campo de un grupo de cargas puntuales

Una carga  $q$  positiva situado en el origen de coordenadas  $x$  y  $z$  (figura 2.2) genera un campo eléctrico en el espacio que le rodea. Calcular el campo eléctrico en el punto  $p$ .

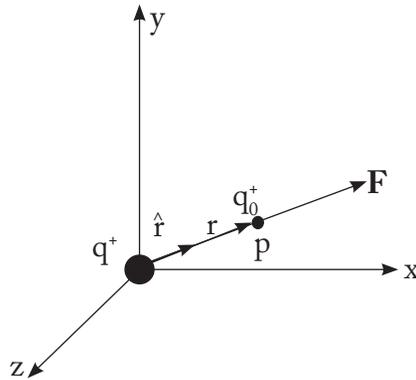


Figura 2.2. Campo eléctrico generado por una carga  $q^+$

El campo eléctrico  $E$  es la fuerza eléctrica  $F$  que produce la carga  $q^+$  en el punto  $p$ ; sabiendo que, en este punto, existe una carga de prueba  $q_0^+$  muy pequeña que tiende a cero, es decir, prácticamente tiene una magnitud despreciable. Utilizamos la ley de Coulomb para calcular la magnitud, dirección y sentido de la fuerza  $F$ ; esto es:

$$\mathbf{F} = K \frac{q_1 q_0^+}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2-2)$$

Para calcular el campo eléctrico, se utiliza la ecuación (2-2) en (2-1). Esto es:

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0^+} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{K \frac{q_1 q_0^+}{r^2} \hat{\mathbf{r}}}{q_0^+} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{K q_1 q_0^+}{r^2 q_0^+} \hat{\mathbf{r}} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{K q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{K q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Kq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \text{ en forma vectorial}$$

$$E = \frac{Kq}{r^2}, \text{ en forma escalar}$$

siendo  $\hat{\mathbf{r}}$  un vector unitario de magnitud 1 y tiene la misma dirección y sentido del vector  $\mathbf{r}$ .

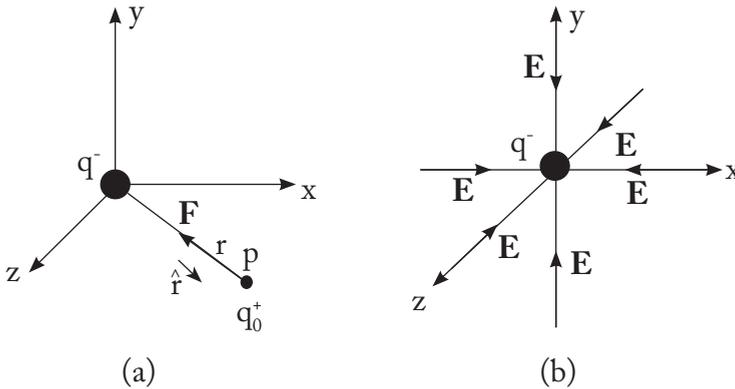


Figura 2.3. (a) Campo eléctrico generado por una carga  $q$  negativa  
b) Dirección de  $\mathbf{E}$  para la carga (a)

Se considera una carga  $q$  negativa ( $q^-$ ) en el origen de coordenadas  $x$  y  $z$ , (figura 2.3). La dirección de la fuerza  $\mathbf{F}$  está dirigida desde el punto  $p$  hacia el origen; debido a que son cargas de signos diferentes, las fuerzas se atraen, por tanto, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  también tiene la misma dirección y sentido que  $\mathbf{F}$  y está dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{Kq}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}), \quad \text{en forma vectorial}$$

$$E = \frac{Kq}{r^2}, \quad \text{en forma escalar}$$

Se dispone de dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , tal como se muestra en la figura 2.4. Calcular la fuerza resultante en el punto p, producida por las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , sobre la carga  $q_0^+$ .

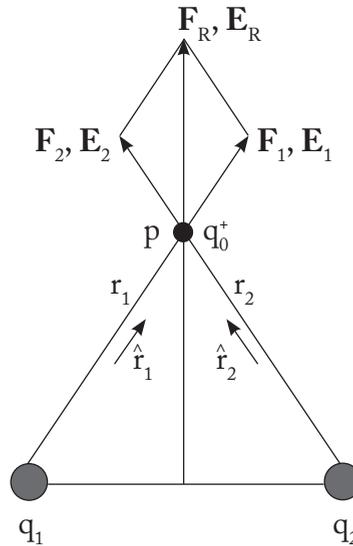


Figura 2.4. Campo eléctrico en el punto p producida por las cargas positivas  $q_1$  y  $q_2$ .

Considerando la figura 2.4, la fuerza total en forma vectorial producida por las cargas  $q_1$  y  $q_2$  en el punto p es:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_R = K \frac{q_1 q_0^+}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + K \frac{q_2 q_0^+}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2$$

Utilizando la ecuación (2-1) tenemos:

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0^+}$$

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0^+} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{K \frac{q_1 q_0^+}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + K \frac{q_2 q_0^+}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2}{q_0^+} = \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} \frac{K q_1 q_0^+}{r_1^2 q_0^+} \hat{\mathbf{r}}_1 + \lim_{q_0^+ \rightarrow 0} K \frac{q_2 q_0^+}{r_2^2 q_0^+} \hat{\mathbf{r}}_2$$

$$\mathbf{E} = K \frac{q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + K \frac{q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2$$

Escribiendo en formato de sumatoria, tenemos:

$$\mathbf{E} = K \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

Este es el campo eléctrico para dos cargas puntuales. En el caso que tengamos N cargas puntuales, el campo eléctrico en el punto p en forma vectorial será:

$$\mathbf{E} = K \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

### 2.3.2 Campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas de igual magnitud y signos opuestos, separados por una distancia  $2a$  (figura 2.5 y figura 2.6).

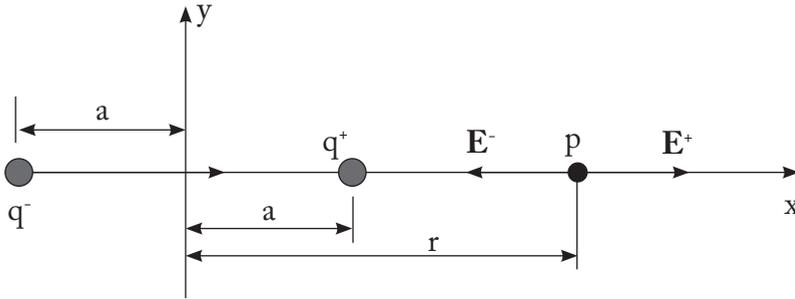


Figura 2.5. Campo eléctrico en el punto  $p$  (situado en el eje  $x$ ) debido a un dipolo eléctrico.

Considerando la figura 2.5, el campo eléctrico en el punto  $p$  producido por el dipolo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p &= \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, & \text{en forma vectorial} \\ E_p &= E^+ - E^-, & \text{en forma escalar} \end{aligned}$$

$$E^+ = k \frac{q}{(r - a)^2} \qquad E^- = k \frac{q}{(r + a)^2}$$

$$E_p = k \frac{q}{(r - a)^2} - k \frac{q}{(r + a)^2} = kq \left( \frac{1}{(r - a)^2} - \frac{1}{(r + a)^2} \right)$$

$$E_p = kq \left[ \frac{(r + a)^2 - (r - a)^2}{(r - a)^2 (r + a)^2} \right] = kq \left[ \frac{(r^2 + 2ra + a^2 - r^2 + 2ra - a^2)}{(r^2 - a^2)^2} \right]$$

$$E_p = kq \left( \frac{4ar}{(r^2 - a^2)^2} \right) = 2k \left( \frac{2aqr}{(r^2 - a^2)^2} \right)$$

$2aq$  = momento de dipolo eléctrico

$\mathbf{p} = 2aq \hat{\mathbf{r}}$ ,      vector

$p = 2aq$ ,      escalar

Si  $r \gg 2a$

En el término  $(r^2 - a^2)^2$  de la siguiente ecuación,  $a$  es despreciable, es decir vale cero, entonces:

$$E_p = 2k \left( \frac{pr}{(r^2 - a^2)^2} \right) = 2k \left( \frac{pr}{(r^2)^2} \right) = 2k \frac{pr}{r^4}$$

$$E_p = 2k \frac{P}{r^3}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3}$$

Considerando la figura 2.6, el campo eléctrico en el punto S producido por el dipolo eléctrico es:

$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$ ,    en forma vectorial

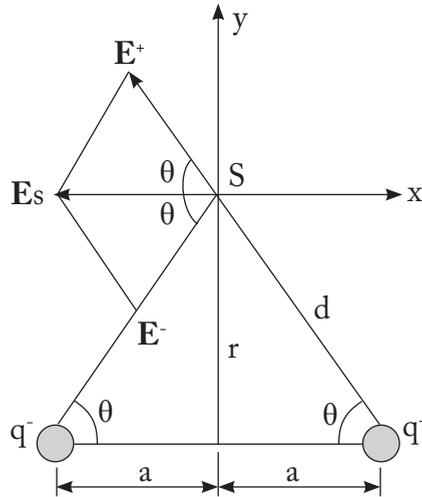


Figura 2.6. Campo eléctrico en el punto S (situado en el eje y) debido a un dipolo eléctrico.

Para calcular la magnitud del campo eléctrico  $E_s$  en el punto S, trazamos el sistema de referencias en el punto S y descomponemos los campos  $E$  en el eje  $x$  y en el eje  $y$ . Esto es:

$$E_y = \sum_{i=1}^N E_{yi}$$

$$E_y = +E_y^+ - E_y^-$$

Ya que  $q^- = q^+ = q \Rightarrow E^+ = E^-$

$E_y = 0$ , por simetría

$$E_x = \sum_{i=1}^N E_{xi}$$

$$E_x = +E_x^+ - E_x^-$$

$$E_x = -E^+ \cos \theta - E^- \cos \theta = -(E^+ + E^-) \cos \theta = -2E^+ \cos \theta$$

$$d = \sqrt{r^2 + a^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E^+ = E^- = k \frac{q}{d^2} = k \frac{q}{r^2 + a^2}$$

$$E_x = -2 \frac{kq}{r^2 + a^2} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{2aqk}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = - \frac{2aqk}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_s = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x^2 + 0} = E_x$$

$$E_s = E_x$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

como  $r \gg 2a$

$$E_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{r^3} \quad \text{magnitud}$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} \quad \text{vector}$$

### 2.3.3 Un dipolo en un campo eléctrico

El momento de dipolo eléctrico se puede considerar como un vector  $\mathbf{p}$  cuya magnitud es  $p = 2aq$ , y cuya dirección está dirigida de la carga negativa a la positiva.

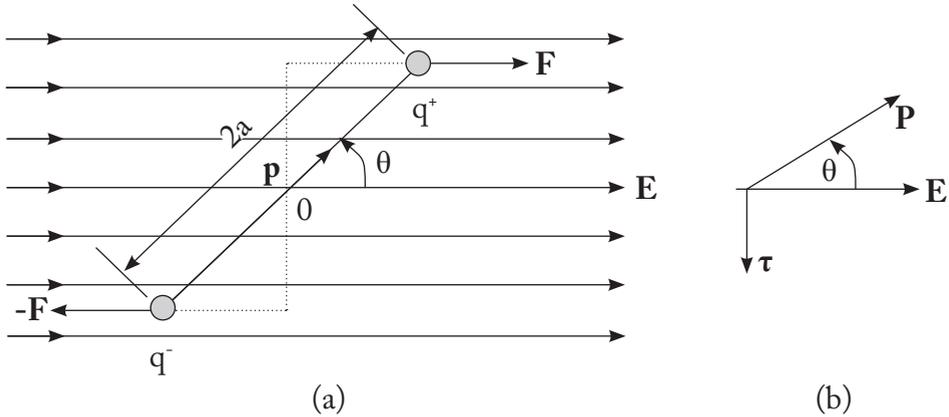


Figura 2.7. a) Un dipolo eléctrico en un campo externo uniforme.  
 b) Una vista en perspectiva para ilustrar que  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$   
 (Resnick y Halliday, 1977, p. 842).

El dipolo se coloca en un campo eléctrico uniforme externo  $\mathbf{E}$ , su momento de dipolo  $\mathbf{p}$  forma un ángulo  $\theta$  con este campo. Obran dos fuerzas iguales y opuestas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  como se muestra en la figura 2.7 (a), siendo la magnitud de la fuerza igual a:  $F = qE$ . La fuerza neta que actúa sobre el dipolo es igual a cero, pero hay un momento neto ( $\tau$ ) con respecto a un eje que pasa por O.

Aplicando la fórmula de momento en el punto O producida por las dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\tau &= 2F (a \text{ Sen } \theta) = 2aF \text{ Sen } \theta \\ \tau &= 2aqE \text{ Sen } \theta \\ \tau &= pE \text{ Sen } \theta\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2-3)$$

La ecuación (2-3) representa el momento de torsión que realiza el dipolo y lo dibujamos en la figura 2.7 (b). Así, un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$  experimenta un momento que tiende a alinearlo con el campo  $\mathbf{E}$ .

El trabajo necesario para cambiar de orientación al dipolo eléctrico va a ser igual a:

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \text{ Sen } (\theta) d\theta = U$$

Donde  $U$  = energía potencial, ya que estamos interesados solo en los cambios de energía potencial.

$$U = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \text{Sen } \theta d\theta = -pE \text{ Cos } \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$U = -pE[\text{Cos } \theta - \text{Cos } \theta_0]$$

Si escogemos la orientación de referencia de  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , se obtiene:

$$U = pE \text{ Cos } \theta$$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

### 2.3.4 Campo eléctrico para una distribución lineal de cargas

Cuando las cargas se encuentran distribuidas uniformemente a lo largo de una línea recta (una barra), la carga total viene dada por:

$$Q = \lambda l$$

siendo,

$Q$  = carga total

$\lambda$  = densidad lineal de carga

$l$  = distancia total

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

### 2.3.5 Campo eléctrico para una distribución superficial de cargas

Cuando las cargas se encuentran distribuidas uniformemente en una superficie, la carga total viene dado por:

$$Q = \sigma S$$

Siendo,

$Q$  = carga total

$\sigma$  = densidad superficial de carga

$S$  = superficie donde se encuentran las cargas

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

### 2.3.6 Campo eléctrico para una distribución volumétrica de cargas

Cuando las cargas se encuentran distribuidas uniformemente dentro de un volumen, la carga total viene dado por:

$$Q = \rho V$$

Donde,

$Q$  = carga total

$\rho$  = densidad volumétrica de cargas

$V$  = volumen donde se encuentran las cargas

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

## 2.4 Representación geométrica del campo eléctrico

### Líneas de fuerza. Propiedades para la representación del campo eléctrico

1. En cada punto a lo largo de una línea dada, la tangente a la línea (dirigida en el mismo sentido de esta) es paralela al campo eléctrico en ese punto.
2. El número de líneas de campo eléctrico en cualquier región del espacio es proporcional a la intensidad del campo eléctrico en esa zona.
3. Las líneas de campo  $E$  no pueden cruzarse nunca la una a la otra.
4. Todas las líneas de campo son continuas en todas las regiones del espacio que no contengan carga eléctrica; así, una línea de campo se debe originar en una partícula con carga positiva y terminar en otra con carga negativa, pero nunca ninguna línea de campo se puede originar ni terminar en cualquier punto en el que no haya una carga eléctrica.

Los siguientes gráficos, que se encuentran dibujados en las figuras 2.8 a 2.13, nos muestran la geometría de las líneas de campo eléctrico.

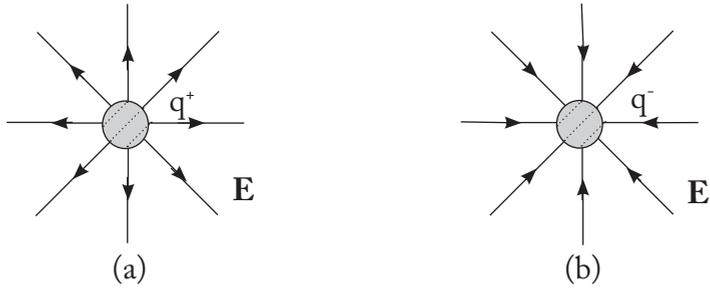


Figura 2.8. (a) Líneas de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , debido a una carga puntual positiva.  
 (b) Líneas de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , debido a una carga puntual negativa.

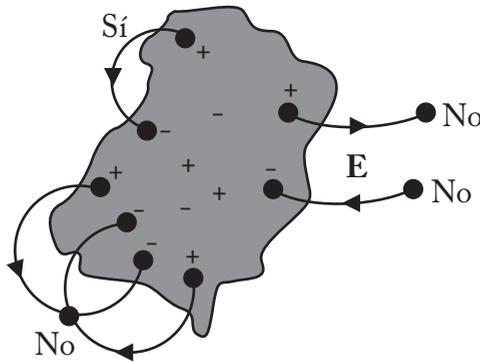


Figura 2.9. Líneas de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de un cuerpo con cargas eléctricas positivas y negativas

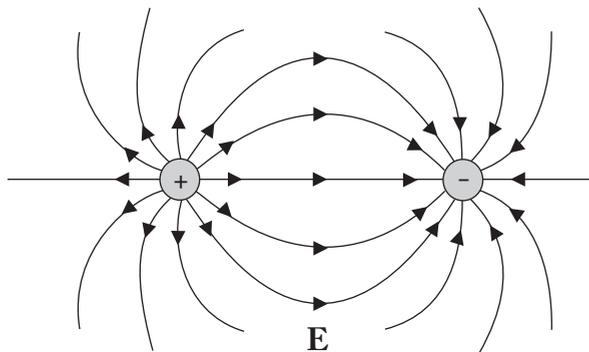


Figura 2.10. Líneas de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  para un dipolo eléctrico

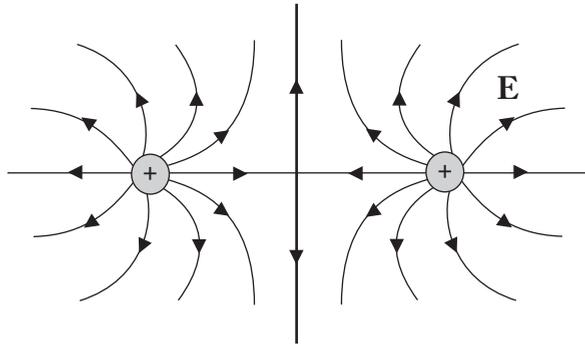


Figura 2.11. Líneas de campo eléctrico  $E$  para dos cargas de igual signo (+)

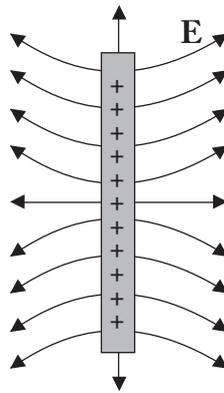


Figura 2.12. Líneas de campo eléctrico  $E$  para una lámina finita

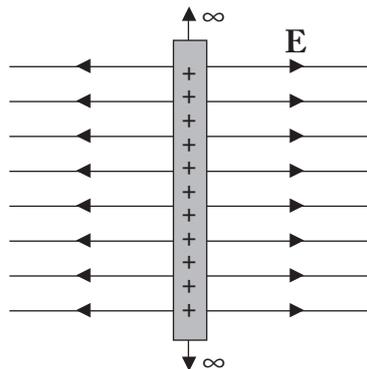


Figura 2.13. Líneas de campo eléctrico  $E$  para una lámina infinita

## 2.5 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 2)

**Problema 2.1.** Encuentre el campo eléctrico en el punto p debido a las cargas que se muestran en la figura 2.14. Las distancias desde las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  al punto p son de 50 cm y  $q_1 = 2\mu\text{c}$ ,  $q_2 = 12\mu\text{c}$ ,  $q_3 = -8\mu\text{c}$ .

*Datos:*

$$r_1 = r_2 = r_3 = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

$$q_1 = 2\mu\text{c} = 2 \times 10^{-6} \text{ coul}$$

$$q_2 = 12\mu\text{c} = 12 \times 10^{-6} \text{ coul}$$

$$q_3 = -8\mu\text{c} = -8 \times 10^{-6} \text{ coul}$$

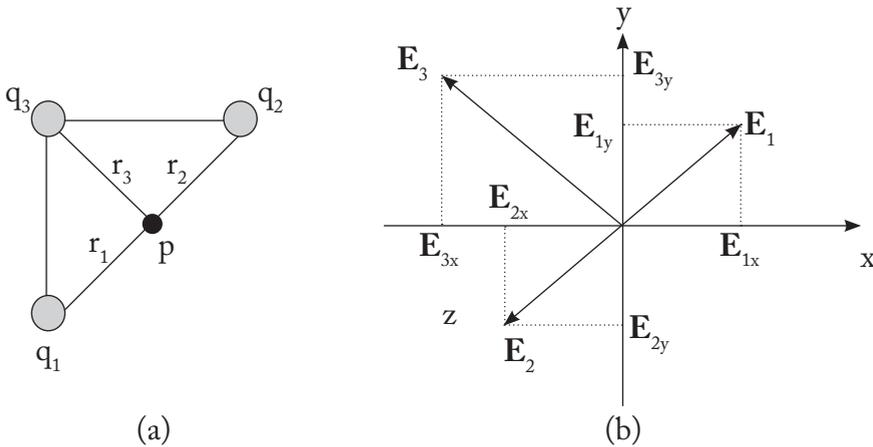


Figura 2.14. (a) Triángulo isósceles. (b) Sistema de referencia en p de (a).

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

$$E_x = \sum_{i=1}^N E_{xi}$$

$$E_y = \sum_{i=1}^N E_{yi}$$

$$E_x = E_{1x} - E_{2x} - E_{3x}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{3y} - E_{2y}$$

$$E_{1x} = E_1 \cos 45^\circ$$

$$E_{1y} = E_1 \sin 45^\circ$$

$$E_{2x} = E_2 \cos 45^\circ$$

$$E_{2y} = E_2 \sin 45^\circ$$

$$E_{3x} = E_3 \cos 45^\circ$$

$$E_{3y} = E_3 \sin 45^\circ$$

$$E_x = E_1 \cos 45^\circ - E_2 \cos 45^\circ - E_3 \cos 45^\circ$$

$$E_x = \cos 45^\circ (E_1 - E_2 - E_3) \quad (2-4)$$

$$E_y = E_1 \sin 45^\circ + E_3 \sin 45^\circ - E_2 \sin 45^\circ$$

$$E_y = \sin 45^\circ (E_1 + E_3 - E_2) \quad (2-5)$$

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-6}}{(0.5)^2} = 72000 = 72 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{12 \times 10^{-6}}{(0.5)^2} = 432000 = 432 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_3 = k \frac{q_3}{r_3^2} = 9 \times 10^9 \frac{8 \times 10^{-6}}{(0.5)^2} = 288000 = 288 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Reemplazando valores en las ecuaciones (2-4) y (2-5), tenemos:

$$E_x = \text{Cos } 45^\circ (72 \times 10^3 - 432 \times 10^3 - 288 \times 10^3) = -458.2 \times 10^3 \text{ N/c}$$

$$E_y = \text{Sen } 45^\circ (72 \times 10^3 + 288 \times 10^3 - 432 \times 10^3) = -50.91 \times 10^3 \text{ N/c}$$

$$E_p = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$$

$$E_p = [(-458.2 \times 10^3)^2 + (-50.91 \times 10^3)^2]^{1/2}$$

La magnitud del campo eléctrico es:  $E_p = 4.61 \times 10^5 \text{ N/c}$

Para calcular la dirección, procedemos de la siguiente manera: como el resultado en  $E_x$  y  $E_y$  es negativo, entonces:

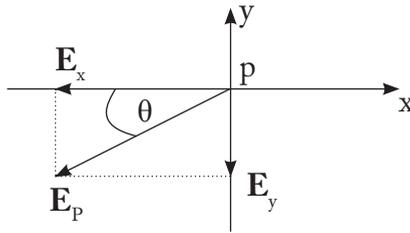


Figura 2.14. (c) Campo total en el punto p

$$\text{Tan } \theta = \frac{E_y}{E_x}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{-50.91 \times 10^3}{-458.2 \times 10^3} = 0.111108686$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} (0.111108686)$$

$$\theta = 6.34^\circ$$

**Problema 2.2.** Calcular el campo eléctrico en el punto P, debido a una distribución lineal de cargas (figura 2.15).

*Solución:*

En un diferencial de longitud ( $dx$ ), existe un diferencial de carga ( $dQ$ ) y este, a su vez, produce un diferencial de campo eléctrico ( $dE_p$ ) en el punto p. Aplicando la fórmula del campo eléctrico, tenemos:

$$E = k \frac{Q}{x^2}, \text{ tomando un diferencial, tenemos:}$$

$$dE = k \frac{dQ}{x^2}, \text{ pero } dQ = \lambda dx, \text{ entonces: } dE = k \frac{\lambda dx}{x^2}$$

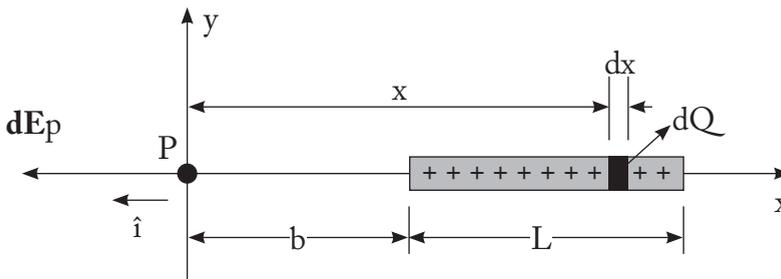


Figura 2.15. Diferencial de campo eléctrico en el punto p ( $dE_p$ )

El diferencial de campo eléctrico en el punto p es:

$$dE_p = dE_x + dE_y$$

$$dE_y = 0$$

$$dE_x = dE \cos 0^\circ = dE$$

$$dE_p = dE, \text{ integrando tenemos:}$$

$$E = \int dE = \int_b^{b+L} k \frac{\lambda dx}{x^2}$$

$$E = -k\lambda \int_b^{b+L} x^{-2} dx = \left[ k\lambda \left( -\frac{1}{x} \right) \right]_b^{b+L} = \left[ -k\lambda \frac{1}{x} \right]_b^{b+L}$$

$$E = -k\lambda \left[ \frac{1}{b+L} - \frac{1}{b} \right] = -k\lambda \left[ \frac{b - (b+L)}{b(b+L)} \right]$$

$$E = -k\lambda \left[ \frac{b - b - L}{b(b+L)} \right] = k\lambda \frac{L}{b(b+L)}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{b(b+L)} \quad \text{escalar}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{b(b+L)} \hat{\mathbf{i}} \quad \text{vectorial}$$

**Problema 2.3.** Calcular el campo eléctrico en el punto p, debido a una distribución superficial de cargas en un plano infinito (figura 2.16).

*Solución:*

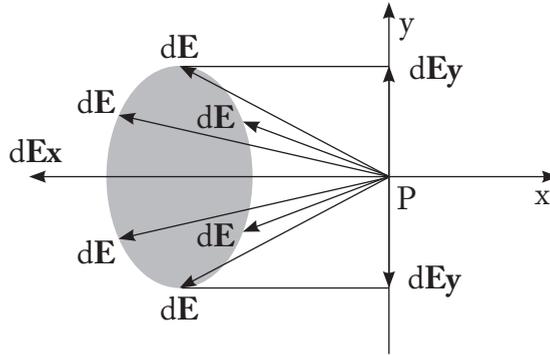
$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y$$

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$dE_y = 0, \quad \text{por simetría}$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$





(c)

Figura 2.16. (c) Sistema de referencia en el punto p

$$\text{Sec } \theta = \frac{1}{a} \quad \rightarrow \quad 1 = a \text{ Sec } \theta$$

$$l^2 = a^2 \text{ Sec}^2 \theta$$

$$dE_x = \frac{k\sigma 2\pi a (\text{Tan } \theta) a (\text{Sec}^2 \theta) d\theta}{a^2 (\text{Sec}^2 \theta)} \text{Cos } \theta$$

$$dE_x = k\sigma 2\pi \text{Tan } \theta \text{Cos } \theta d\theta$$

$$dE_x = k\sigma 2\pi \text{Sen } \theta d\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi/2} k\sigma 2\pi \text{Sen } \theta d\theta = k\sigma 2\pi \int_0^{\pi/2} \text{Sen } \theta d\theta$$

$$E_x = k\sigma 2\pi [-\text{Cos } \theta \Big|_0^{\pi/2}] = -k\sigma 2\pi [\text{Cos } \frac{\pi}{2} - \text{Cos } 0^\circ] = -k\sigma 2\pi [\text{Cos } 90^\circ - \text{Cos } 0^\circ]$$

$$E_x = k\sigma 2\pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + 0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

**Problema 2.4.** Calcular el campo eléctrico en el interior de una esfera, debido a una distribución volumétrica de cargas (figura 2.17).

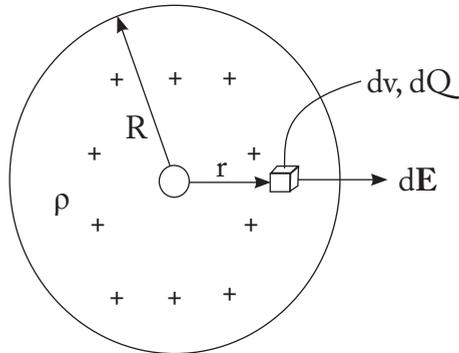


Figura 2.17. Esfera con una distribución volumétrica de cargas uniforme

*Solución:*

Campo eléctrico para  $r < R$

Tomamos un diferencial de volumen, dentro del cual se encuentra un diferencial de carga, el cual produce un diferencial de campo eléctrico. Entonces:

$$dE = k \frac{dQ}{r^2} \quad (2-6)$$

Debido a que es una distribución volumétrica de carga, tenemos:

$$dQ = \rho dv \quad (2-7)$$

Reemplazando (2-7) en (2-6), tenemos:

$$dE = k\rho \frac{dv}{r^2} \quad (2-8)$$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Se toma un diferencial de volumen:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

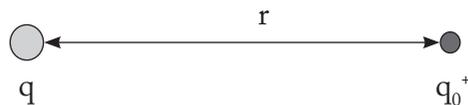
Reemplazando en (2-8) e integrando, tenemos:

$$E = \int dE = \int_0^r 4k\rho\pi dr$$

$$E = 4\pi k\rho r, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} r$$

**Problema 2.5.** “¿Cuál es la magnitud de una carga punto tal que el campo eléctrico, a 50 cm de ella, tenga la magnitud 2.0 N/c? (figura 2.18)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 845).



*Solución:*

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{kqq_0}{q_0r^2} = \frac{q}{r^2} k$$

$$q = E \frac{r^2}{k} = 2.0 \frac{(0.5)^2}{9 \times 10^9} = 5.5555 \times 10^{-11}$$

$$q = 5.6 \times 10^{-11} \text{ coul}$$

**Problema 2.6.** “Dos cargas iguales y opuestas de magnitud  $2.0 \times 10^{-7}$  coul están separadas 15 cm. a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de  $\mathbf{E}$  en un punto a la mitad entre las cargas? b) ¿Qué fuerza (magnitud, dirección y sentido) obraría en un electrón colocado allí? (ver figura 2.19)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 845).

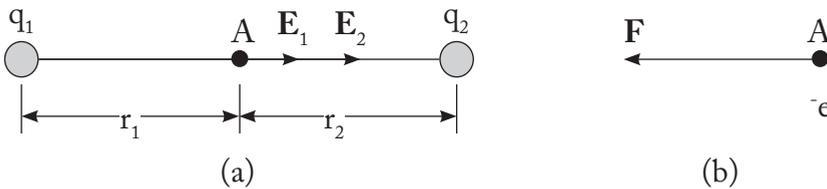


Figura 2.19. (a) Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  son iguales en magnitud, pero de signos opuestos, siendo  $q_2$  negativa. (b) Fuerza  $F$  en el punto A.

*Solución:*

En la figura 2.19 (a),  $r_1 = r_2 = r$ . Entonces, la distancia  $d$  entre las dos cargas es  $d = 2r$ . Despejando  $r$ , tenemos:  $r = d/2$ . Como dato del problema,  $q_1 = q_2 = 2,0 \times 10^{-7}$  coul y  $d = 15\text{cm} = 0.15\text{m}$ .

$$E = E_1 + E_2$$

Donde,  $E_1 = k \frac{q}{r_1^2}$ ,  $E_2 = k \frac{q}{r_2^2}$ , reemplazando tenemos:

$$E = k \frac{q}{r_1^2} + k \frac{q}{r_2^2} = k \frac{q}{r^2} + k \frac{q}{r^2} = 2k \frac{q}{r^2} = 2k \frac{q}{(d/2)^2} = 8k \frac{q}{d^2}$$

$$E = (8)(9 \times 10^9) \frac{(2.0 \times 10^{-7})}{(0.15)^2} = 640000$$

a)  $E = 6,4 \times 10^5 \text{ N/coul}$

b) Al colocar en el punto A un electrón ( $q = e^-$ ), tendremos:

$$F = q E$$

$$F = (6.4 \times 10^5)(1.6 \times 10^{-19}) = 1.024 \times 10^{-13} \text{ N}$$

Siendo  $F$  la magnitud de la fuerza del electrón y, la dirección y sentido de  $\mathbf{F}$  se muestra en la figura 2.19 (b).

**Problema 2.7.** “Dos cargas punto de magnitudes  $+2,0 \times 10^{-7}$  coul y  $+8.5 \times 10^{-8}$  coul están separadas 12 cm. a) ¿Qué campo eléctrico produce cada una en el sitio en donde está la otra? b) ¿Qué fuerza obra en cada una? (ver figura 2.20)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 845).

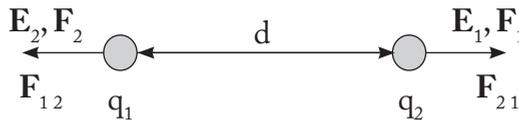


Figura 2.20. Dos cargas puntuales de signos iguales, separadas una distancia  $d$ , ejercen fuerzas entre sí.

*Solución:*

En la figura 2.20, dibujamos los vectores de las fuerzas que producen entre las cargas; esto es, la carga 1 produce una fuerza sobre la carga 2, así

como también la carga 2 produce una fuerza sobre la carga 1. Estas fuerzas las representamos así:

$F_2 = F_{12}$  = fuerza que ejerce la carga 2 sobre la 1

$F_1 = F_{21}$  = fuerza que ejerce la carga 1 sobre la 2

$$E_1 = \frac{F_1}{q_2} = k \frac{q_1 q_2}{q_2 d^2}$$

$$E_2 = \frac{F_2}{q_1} = k \frac{q_1 q_2}{q_1 d^2}$$

Reemplazando los valores en  $E_1$  y  $E_2$ , tenemos:

$$E_1 = k \frac{q_1}{d^2} = 9 \times 10^9 \frac{2.0 \times 10^{-7}}{(0.12)^2} = 125000$$

$$E_1 = 1.25 \times 10^5 \text{ N/coul} \quad E_2 = 1.3 \times 10^4 \text{ N/coul}$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{d^2} = 9 \times 10^9 \frac{28.5 \times 10^{-3}}{(0.12)^2} = 53125$$

$$E_2 = 5.31 \times 10^4 \text{ N/coul}$$

a) La carga mayor produce un campo de  $1.3 \times 10^5$  N/coul en el sitio donde está la menor; la carga menor produce un campo de  $5.3 \times 10^4$  N/coul en el sitio donde está la mayor.

$$b) F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} = 9 \times 10^9 \frac{(2.0 \times 10^{-7})(8.5 \times 10^{-8})}{(0.12)^2}$$

$$F_{12} = 0.010625 \text{ N}$$

$$F_{12} = 1.1 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Como las cargas son de igual signo, la fuerza que ejercen ambas cargas es de repulsión, y los valores de la magnitud de las fuerzas son iguales; esto es  $F_{12} = F_{21}$ .

**Problema 2.8.** “En la figura 2.21, se muestran dos cargas positivas de igual magnitud  $q$ , separadas una distancia  $2a$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 846).

a) Demostrar que en el punto  $p$  y suponiendo que  $r \gg a$ , el valor de  $E$  está dado por:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2}$$

b) ¿Cuál es la dirección de  $E$ ? c) ¿Es razonable que  $E$  varíe conforme a  $r^{-2}$  aquí y conforme a  $r^{-3}$  para el dipolo de la figura 2.6?

*Solución:*

En la figura 2.21, obtenemos los radios  $r_1$  y  $r_2$ . Como las cargas son iguales y el punto  $p$  está en el centro de las dos cargas y a una distancia  $r$ , entonces los campos  $E$  también son iguales; esto es:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = q & r_1 &= r_2 = \sqrt{r^2 + a^2} \\ d &= 2a & E_1 &= E_2 \end{aligned}$$

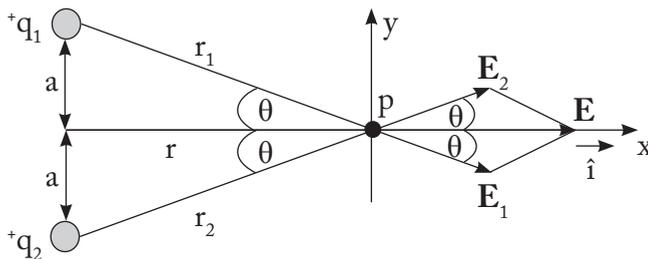


Figura 2.21. Cargas positivas producen un campo  $E$  en el punto  $p$  considerando que  $r \gg 2a$ .

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{xi} = \mathbf{E}_x$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{yi} = \mathbf{E}_y$$

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{1x} + \mathbf{E}_{2x}$$

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_{2y} - \mathbf{E}_{1y}$$

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_1 \cos \theta + \mathbf{E}_2 \cos \theta$$

$$\mathbf{E}_y = 0$$

$$\mathbf{E}_x = 2\mathbf{E}_1 \cos \theta$$

$$\mathbf{E}_1 = k \frac{q}{r_1^2} = k \frac{q}{r^2 + a^2}$$

$$\cos \theta = \frac{r}{r_1}$$

$$\mathbf{E}_x = 2k \frac{q}{r^2 + a^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$\mathbf{E}_x = 2kq \frac{r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Pero } r \gg a$$

Entonces:

$$\mathbf{E}_x = kq \frac{r}{r^3} = 2kq \frac{1}{r^2}$$

$$\mathbf{E}_x = 2kq \frac{1}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{E}_y^2} = \sqrt{\mathbf{E}_x^2 + 0} = \mathbf{E}_x$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \quad \text{L.Q.Q.D}$$

$$\text{b) } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \hat{\mathbf{i}}$$

La dirección del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está en el eje  $x$  (dirección positiva).

c) Es razonable que  $\mathbf{E}$  varíe conforme a  $r^{-2}$ , ya que las dos cargas son de igual signo y por lo mismo hay un campo eléctrico mayor en el punto  $p$  (fuerza de repulsión mayor).

También es razonable que  $\mathbf{E}$  varíe conforme a  $r^{-3}$ , ya que las dos cargas son de igual magnitud y de signo diferente; por lo que se producen dos fuerzas diferentes, siendo la una de atracción y la otra de repulsión. En consecuencia, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  será menor.

**Problema 2.9.** “a) En la figura 2.22, localizar el punto (o puntos) en el cual la intensidad del campo eléctrico es cero. b) Dibujar cualitativamente las líneas de fuerza. Tómese  $a = 50$  cm. (ver figura 2.23)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 846).

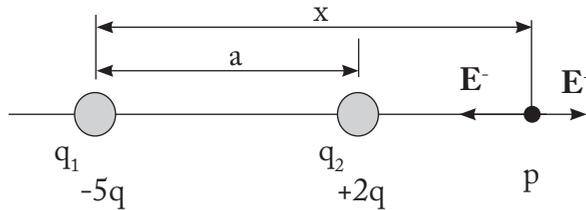


Figura 2.22. Ubicación del punto  $p$  para que  $E$  sea cero.

*Solución:*

Utilizando la figura 2.22, dibujamos los vectores del campo eléctrico que producen las cargas positiva y negativa. Para que el campo sea nulo, el punto debe estar a la derecha o a la izquierda de las cargas. En este caso, el punto  $p$  lo ubicamos a la derecha de las cargas. El campo eléctrico total en el punto  $p$  ( $E_p$ ) debe ser igual a cero; esto es:

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$$

$$E_p = E^+ - E^- = 0$$

$$E^+ = E^-$$

$$E^+ = k \frac{2q}{(x-a)^2} \quad E^- = k \frac{5q}{x^2}$$

Igualando estas dos ecuaciones, tenemos:

$$k \frac{2q}{(x-a)^2} = k \frac{5q}{x^2} \rightarrow \frac{2q}{(x-a)^2} = \frac{5q}{x^2}$$

$$2x^2 = 5(x-a)^2$$

$$2x^2 = 5(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$2x^2 - 5x^2 + 10ax - 5a^2 = 0$$

$$-3x^2 + 10ax - 5a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{5}{3}a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}(0.5)x + \frac{5}{3}(0.5)^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1.25}{3} = 0$$

$$x^2 - 1.67x + 0.42 = 0$$

$$x = \frac{1.67 \pm \sqrt{(-1.67)^2 - 4(0.42)}}{2} = \frac{1.67 \pm 11.053}{2}$$

- a)  $x_1 = 1.3615 \text{ m}$   
 $x_2 = 0.31$ , este valor no puede ser ya que  $x > 0,5 \text{ m}$ .

Entonces, la respuesta es  $x = x_1 = 1.36 \text{ m}$ .

- b)  $q_1 = -5q$   
 $q_2 = +2q$

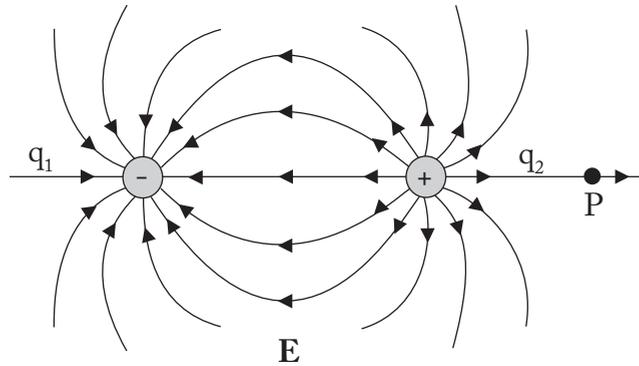


Figura 2.23. Líneas de campo eléctrico producidas por las cargas

**Problema 2.10:** “Determinar  $\mathbf{E}$  en magnitud y dirección en el centro del cuadrado de la figura 2.24. Considérese que  $q = 1.0 \times 10^{-8}$  coul y  $a = 5.0$  cm” (Resnick y Halliday, 1977, p. 846).

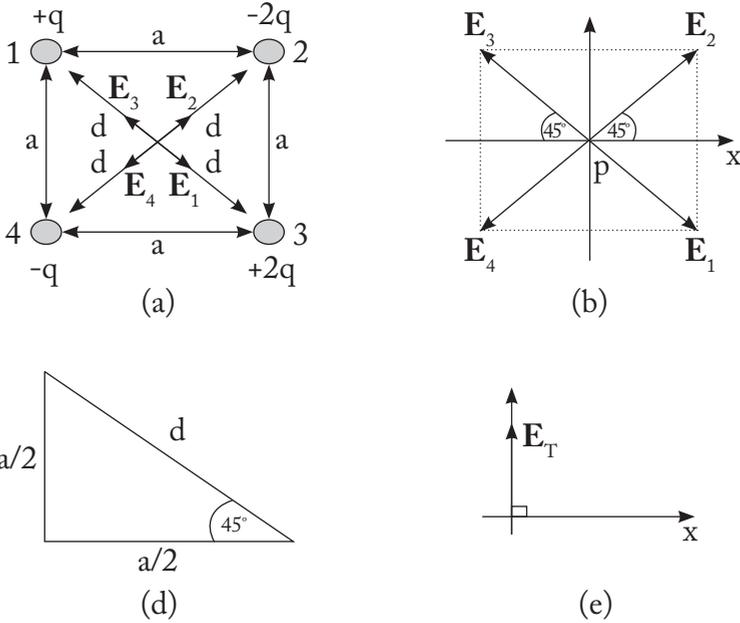


Figura 2.24 a) Cargas en los vértices de un cuadrado, b) sistema de referencia en el punto p, c) triángulo de (b), d) dirección del campo eléctrico total  $\mathbf{E}_T$  en el punto p

*Solución:*

En las figuras 2.24 (a) y (b), realizamos la sumatoria de campos en el eje  $x$  y en el eje  $y$ , utilizando el siguiente procedimiento:

$$\mathbf{E}_x = \sum_{i=1}^4 \mathbf{E}_{xi}$$

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{x1} + \mathbf{E}_{x2} - \mathbf{E}_{x3} - \mathbf{E}_{x4}$$

$$E_x = E_1 \cos 45^\circ + E_2 \cos 45^\circ - E_3 \cos 45^\circ - E_4 \cos 45^\circ$$

$$E_x = \cos 45^\circ (E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$$

$$E_1 = k \frac{q}{(a^2/2)} = \frac{2kq}{a^2}$$

$$E_2 = k \frac{2q}{(a^2/2)} = \frac{4kq}{a^2}$$

$$E_3 = k \frac{2q}{(a^2/2)} = \frac{4kq}{a^2}$$

$$E_4 = k \frac{q}{(a^2/2)} = \frac{2kq}{a^2}$$

$$E_x = \cos 45^\circ \left( \frac{2kq}{a^2} + \frac{4kq}{a^2} - \frac{4kq}{a^2} - \frac{2kq}{a^2} \right)$$

$$E_x = \cos 45^\circ (0) \quad \rightarrow \quad E_x = 0$$

$$E_y = \sum_{i=1}^4 E_{yi}$$

$$E_y = E_{y2} + E_{y3} - E_{y1} - E_{y4}$$

$$E_y = E_2 \sin 45^\circ + E_3 \sin 45^\circ - E_1 \sin 45^\circ - E_4 \sin 45^\circ$$

$$E_y = \sin 45^\circ (E_2 + E_3 - E_1 - E_4)$$

$$E_y = \sin 45^\circ \left( \frac{4kq}{a^2} + \frac{4kq}{a^2} - \frac{2kq}{a^2} - \frac{2kq}{a^2} \right)$$

$$E_y = \text{Sen } 45^\circ \left( \frac{8kq}{a^2} - \frac{4kq}{a^2} \right)$$

$$E_y = \text{Sen } 45^\circ \left( \frac{4kq}{a^2} \right)$$

$$E_y = \text{Sen } 45^\circ \left( \frac{(4)(9 \times 10^9)(1.0 \times 10^{-8})}{(0.05)^2} \right) = 101823.3765$$

$$E_y = 1.02 \times 10^5 \text{ N/coul}$$

$$E_T = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_y^2} = \sqrt{0 + (101823.3765)^2} = 101823.3765$$

$$E_T = 1,02 \times 10^5 \text{ N/coul}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{E_y}{E_x} \right)$$

$$\theta = 90^\circ$$

La figura 2.24 (d) muestra la dirección y sentido del campo eléctrico  $E_T$

**Problema 2.11.** “Dos cargas, punto de magnitud y signo desconocidos, se colocan separadas una distancia  $d$ . a) Si es posible tener a  $E = 0$  en algún punto que no esté entre las cargas, pero sí en la línea que los une, ¿cuáles son las condiciones que debe cumplir y dónde está localizado el punto? b) ¿Es posible, para alguna colocación de dos cargas punto, encontrar dos puntos (ninguno de los cuales esté al infinito) en el cual  $E = 0$ ?; si es así, ¿en qué condiciones?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 846).

*Solución:*

a) Como se quiere que el punto no esté entre las cargas y que el campo eléctrico sea nulo, se requiere que las cargas sean de signo contrario y de valor diferente. De acuerdo con esto, situamos el punto p y los vectores de campo eléctrico a una distancia x de  $q_2$  (figura 2.25).

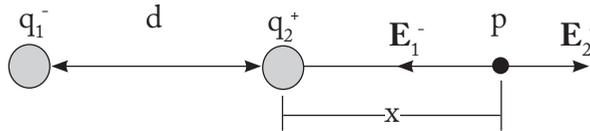


Figura 2.25. Distancia x, para que el campo eléctrico sea cero en p.

En la figura 2.25, en el punto p no existe componentes en el eje y, solo existe en el eje x, entonces, el campo eléctrico total es  $E_p$ .

$$E_p = E_2^+ - E_1^- = 0, \text{ por condición del problema}$$

$$E_2^+ = E_1^-$$

$$E_1^- = k \frac{q_1}{(d+x)^2}$$

$$E_2^+ = k \frac{q_2}{x^2}$$

$$k \frac{q_2}{x^2} = k \frac{q_1}{(d+x)^2} \quad (2-9)$$

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$\frac{d+x}{x} = \sqrt{q_1/q_2}$$

$$(d/x) + 1 = \sqrt{q_1/q_2} \quad \rightarrow \quad d/x = \sqrt{q_1/q_2} - 1$$

$$x = d (\sqrt{q_1/q_2} - 1)$$

b) No es posible, porque al resolver la ecuación (2-9) se obtiene dos valores que corresponden a cargas del mismo signo y de diferente signo.

**Problema 2.12.** “Un trozo de varilla delgada no conductora, de longitud finita  $\ell$ , tiene una carga total  $q$  distribuida uniformemente a lo largo de ella. Demuestre que  $E$  en el punto  $p$ , en la perpendicular bisectriz en la figura 2.26, está dada por:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4y^2}} \text{ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 846).}$$

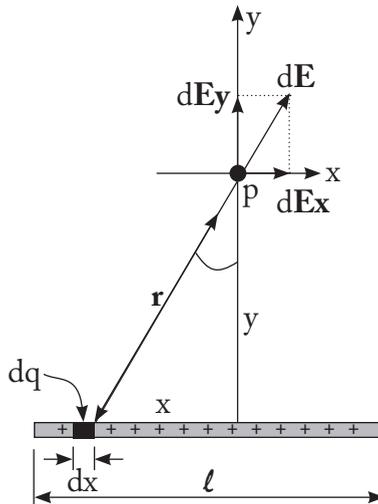


Figura 2.26. Varilla con distribución lineal de cargas uniformes

*Solución:*

En la figura 2.26, sobre la varilla cogemos un diferencial de longitud  $dx$ , en el cual existe un diferencial de cargas  $dq$ . Este, a su vez, produce un diferencial de campo eléctrico  $dE$ . Entonces, tenemos:

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

pero,

$$dE_x = 0, \text{ por simetría}$$

$$dE_y = dE \cos \theta \quad (2-10)$$

$$\lambda = \frac{q}{\ell}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Reemplazando valores en la ecuación (2-10); obtenemos:

$$dE_y = k \frac{\lambda dx}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dE_y = \int \frac{k\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = 2k\lambda y \int_0^{\ell/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Pero, recurriendo a las técnicas de integración, el resultado de la integral es:

$$\int_0^{\ell/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left[ \frac{1}{y^2} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_0^{\ell/2}$$

Entonces:

$$E_y = 2k\lambda(y) \left[ \frac{1}{y^2} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_0^{\ell/2}$$

$$E_y = 2k\lambda(y) \left[ \frac{1}{y^2} \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell^2}{4} + y^2} - 0 \right]$$

$$E_y = k\lambda \frac{\ell}{y} \frac{1}{\left(\frac{\ell^2}{4} + y^2\right)^{1/2}}$$

$$E_y = \frac{2\ell\lambda}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{\ell^2 + 4y^2}}$$

$$E_y = \frac{\lambda\ell}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4y^2}}$$

$$E_y = \frac{q \ell}{\ell 2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4y^2}}$$

$$E_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4y^2}}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_y^2} = E_y$$

$$E_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4y^2}}$$

**Problema 2.13.** “Una varilla delgada no conductora se dobla en forma de arco de círculo, con radio  $a$ , y subtiende un ángulo  $\theta_0$  en el centro del círculo. A lo largo de toda su longitud, se distribuye uniformemente una carga total  $q$ . Encontrar la intensidad del campo eléctrico en el centro del círculo en función de  $a$ ,  $q$  y  $\theta_0$  (ver figura 2.27)” (Resnick y Halliday, 1977, p .847).

*Solución:*

En la figura 2.27, se procede a calcular el campo eléctrico en el punto  $p$  (en el centro del círculo). Se dibujan los vectores de campo eléctrico, y vemos que el campo en el eje  $x$  es cero por simetría; solo existe contribución del campo eléctrico en el eje  $y$ , esto es:

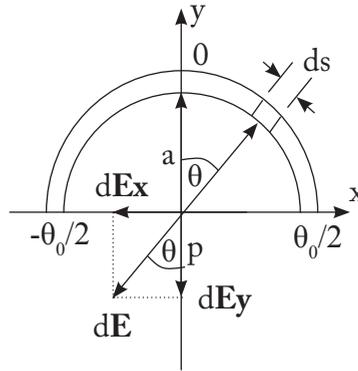


Figura 2.27. Varilla delgada no conductora forma un semicírculo, el cual tiene una distribución lineal de cargas uniformes.

$$E_x = 0 \qquad \lambda = \frac{q}{S} \quad , \quad S = \text{arco}$$

$$dE_y = dE \cos \theta \qquad dq = \lambda dS$$

$$dE = k \frac{dq}{a^2} \qquad dS = a d\theta$$

$$dE = k \frac{\lambda dS}{a^2} = k \frac{\lambda a d\theta}{a^2} \qquad \lambda = \frac{q}{a\theta}$$

$$dE = k \frac{\lambda d\theta}{a} \qquad \theta = \pi$$

$$dE_y = k \frac{\lambda d\theta}{a} \cos \theta$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{a} \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \cos \theta \, d\theta$$

$$E_y = 2k \frac{\lambda}{a} \int_0^{\theta_0/2} \cos \theta \, d\theta = 2k \frac{\lambda}{a} [\text{Sen } \theta]_0^{\theta_0/2}$$

$$E_y = 2k \frac{\lambda}{a} \left[ \text{Sen} \frac{\theta_0}{2} - \text{Sen} 0^\circ \right]$$

$$E_y = 2k \frac{\lambda}{a} \text{Sen} \frac{\theta_0}{2}$$

$$E_y = 2k \frac{q}{a^2 \theta_0} \text{Sen} \frac{\theta_0}{2}$$

$$E_y = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 \theta_0} \text{Sen} \frac{\theta_0}{2}$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 \theta_0} \text{Sen} \frac{\theta_0}{2}$$

**Problema 2.14.** “Un recipiente hemisférico no conductor, de radio interior  $a$ , tiene una carga total  $q$  distribuida uniformemente en su superficie interior. Encontrar el campo eléctrico en el centro de curvatura (ver figura 2.28)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 847).

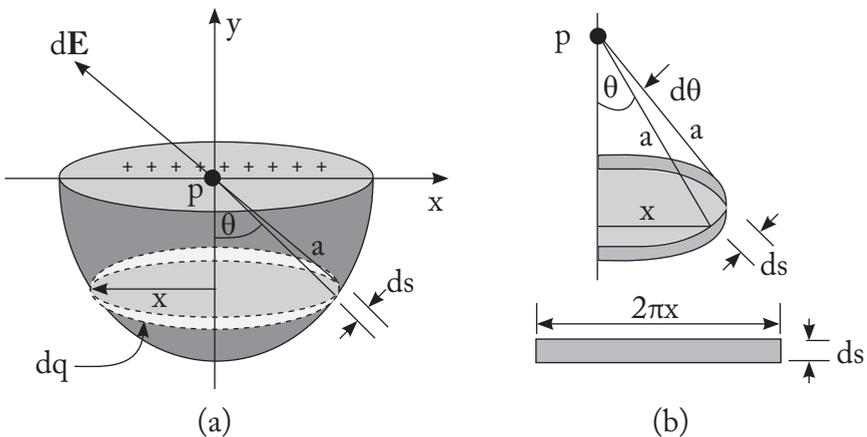


Figura 2.28 (a) Recipiente hemisférico no conductor. (b) Diferencial de superficie de (a)

Solución:

$$dE_x = 0 \quad , \quad \text{por simetría}$$

$$dE_y = dE \cos \theta \quad \text{arco} = ds$$

$$dE = k \frac{dq}{a^2} \quad dS = a d\theta$$

$$\sigma = \frac{q}{A_1} \quad \text{sen } \theta = \frac{x}{a}$$

$A$  = área total de la esfera

$$A = 4\pi(a)^2 \quad dA = 2\pi(x)dS = \text{área del rectángulo figura 2.28b}$$

$$A_1 = \frac{A}{2} = \frac{4\pi(a)^2}{2} \quad \sigma = \frac{q}{2\pi(a)^2}$$

$$A_1 = 2\pi a^2$$

$$E_y = \int dE_y$$

$$dE = k \frac{\sigma dA}{a^2}$$

$$dE = k\sigma \frac{2\pi x dS}{a^2}$$

$$dE_y = \frac{k\sigma(2\pi)x dS}{a^2} \cos \theta$$

En la figura 2.28 (b)

$$\text{Sen } \theta = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad x = a \text{ Sen } \theta$$

$$dE_y = \frac{k\sigma(2\pi)(a \text{ Sen } \theta)(a d\theta)}{a^2} \cos \theta$$

$$\int E_y = \int_0^{\pi/2} k\sigma 2\pi(\text{Sen } \theta)(\text{Cos } \theta)d\theta$$

$$E_y = k\sigma \pi \int_0^{\pi/2} 2(\text{Sen } \theta)(\text{Cos } \theta)d\theta$$

$$E_y = k\sigma \pi \int_0^{\pi/2} 2\text{Sen } \theta d\theta$$

$$E_y = - \left[ \frac{k\sigma\pi}{2} \text{Cos } 2\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$E_y = - \frac{k\sigma\pi}{2} \left( \text{Cos } \frac{2\pi}{2} \text{Cos } 2(0) \right)$$

$$E_y = - \frac{k\sigma\pi}{2} (-1 -1)$$

$$E_y = k\sigma\pi$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_y^2} = E_y = k\sigma\pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi a^2} \pi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

**Problema 2.15.** “La figura 2.29 muestra un anillo de carga  $q$  y de radio  $a$ . Calcular  $\mathbf{E}$  para puntos situados en el eje del anillo a una distancia  $x$  de su centro” (Resnick y Halliday, 1977, p. 835). Además, demostrar que el máximo valor de  $E$  ocurre para  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

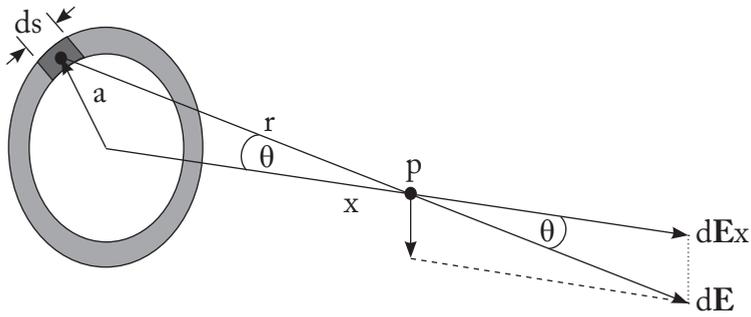


Figura 2.29. Anillo de radio  $a$  tiene una carga  $q$  que produce un campo eléctrico en el punto  $p$  a una distancia  $x$  desde el centro del círculo.

*Solución:*

En la figura 2.29, tenemos lo siguiente:

$$dE_y = 0 \quad , \quad \text{por simetría}$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE = k \frac{dq}{a^2} = k \frac{dq}{(x^2 + a^2)}$$

$$dq = \lambda ds$$

$$dE = k \frac{\lambda ds}{x^2 + a^2} \qquad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$$

$$dE_x = k \frac{\lambda ds}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = k \frac{\lambda x ds}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = \int_0^{2\pi a} k \frac{\lambda x ds}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k \lambda x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi a} ds$$

$$E_x = \frac{\lambda x ds}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = [s]_0^{2\pi a} \frac{k\lambda x 2\pi a}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lambda = \frac{q}{2\pi a}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx 2\pi a}{2\pi a(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_x^2} = E_x$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad E = kq x (x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dE}{dx} = kq \left[ x \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} 2x \right] + (x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dE}{dx} = kq \left[ -\frac{3x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\frac{dE}{dx} = kq \left[ \frac{-3x^2 + (x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} \right] = 0$$

$$kq(-3x^2 + (x^2 + a^2)) = 0$$

$$-3x^2 + x^2 + a^2 = 0$$

$$-2x^2 + a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2/2$$

$$x = a/\sqrt{2} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

**Problema 2.16.** “Un disco delgado circular, de radio  $a$ , está cargado uniformemente y su carga por unidad de área es  $\sigma$ . Encontrar el campo eléctrico en el eje del disco a una distancia  $r$  del disco. (ver figura 2.30)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 848).

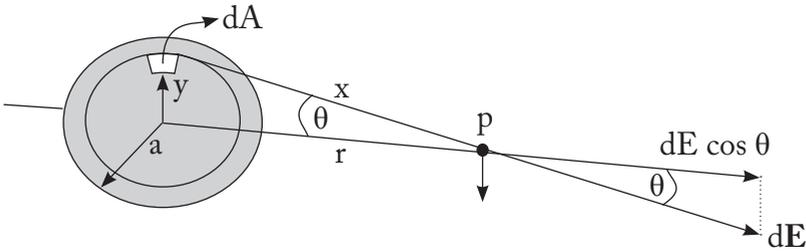


Figura 2.30. Disco de radio  $a$  tiene cargas superficiales uniformes.

*Solución:*

$$E = E_x + E_y$$

$$A = \pi y^2$$

$$E_y = 0 \quad , \text{ por simetría}$$

$$dA = 2\pi y dy$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$x^2 = y^2 + r^2$$

$$dE = k \frac{dq}{x^2}$$

$$\cos \theta = \frac{r}{x} = \frac{r}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$\sigma = \frac{q}{a}$$

$$dq = \sigma dA$$

$$dE = k \frac{\sigma dA}{y^2 + r^2} = k\sigma \frac{2\pi y dy}{y^2 + r^2}$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{k\sigma 2\pi y dy}{y^2 + r^2} \frac{r}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$E_x = k\sigma 2\pi r f \int_0^a \frac{y dy}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u = y^2 + r^2$$

$$du = 2y dy$$

$$E_x = k\sigma 2\pi r f \frac{du}{2u^{\frac{3}{2}}} = k\sigma 2\pi r f u^{-\frac{3}{2}} du$$

$$E_x = k\sigma \pi r \left( -\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) u^{-\frac{1}{2}} \Big|$$

$$E_x = -2k\sigma \pi r \left[ \frac{1}{(y^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^a$$

$$E_x = -2k\sigma \pi r \left[ \frac{1}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E_x = -2k\sigma \pi r \left[ \frac{1}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r} \right]$$

$$E_x = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \left[ \frac{r}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{r} \right]$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{r}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x^2 + 0} = E_x$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{r}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

**Problema 2.17.** “Un electrón que se mueve con una velocidad de  $5 \times 10^8$  cm/seg, se dispara paralelamente a un campo eléctrico de intensidad  $1.0 \times 10^3$  N/coul colocado de modo que retarde su movimiento. a) ¿Hasta dónde llegará el electrón en el campo antes de quedar (momentáneamente) en reposo? b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá? c) Si el campo eléctrico termina bruscamente después de 0.8 cm, ¿qué fracción de su energía inicial pierde el electrón al atravesarlo? (ver figura 2.31)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 849).

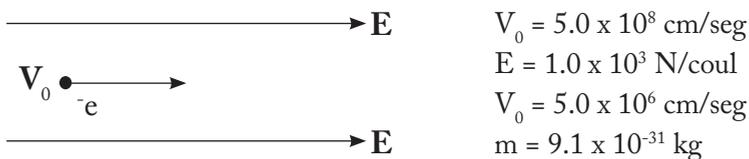


Figura 2.31. Un electrón se mueve paralelamente con el campo eléctrico  $E$ .

*Solución:*

En la figura 2.31, al moverse el electrón, es por acción de una fuerza. Esto es:

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$$

$$V_f^2 = V_0^2 - 2ax$$

$$V_f = 0$$

$$2ax = V_0^2$$

$$x = \frac{V_0^2}{2a}$$

$$x = \frac{V_0^2}{2 \frac{Eq}{m}} = \frac{mV_0^2}{2Eq}$$

$$x = \frac{(9.1 \times 10^{-31})(5.0 \times 10^6)^2}{2(1.0 \times 10^3)(1.6 \times 10^{-19})} = 0.0711648 \text{ m}$$

a)  $x = 7,1 \text{ cm}$

$$a = \frac{Eq}{m} = \frac{(1 \times 10^3)(1.6 \times 10^{-19})}{(9.1 \times 10^{-31})} = 1.75824 \times 10^{14} \text{ m/seg}^2$$

$$V_f = V_0 - at$$

$$V_f = 0$$

$$t = \frac{V_0}{a} = \frac{5 \times 10^6}{1.75824 \times 10^{14}} = 2.844 \times 10^{-8} \text{ seg}$$

$$b) t = 2.844 \times 10^{-8} \text{ seg}$$

$$c) x = 0.8 \text{ cm} = 0.008 \text{ m}$$

$$a = \frac{V_0^2}{2x} = \frac{(5 \times 10^6)^2}{2(0.008)} = 1.5625 \times 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{Eq}{m}$$

$$E_2 = \frac{am}{q} = \frac{(1.5625 \times 10^{15})(9.1 \times 10^{-31})}{(1.6 \times 10^{-19})}$$

$$E_2 = 8886.71875 \text{ N/coul}$$

$$\frac{E_1}{E_2} \times 100 = \frac{1 \times 10^3}{8886.71875} \quad 11.25\%$$

$$11.25\%$$

**Ejercicio 2.18.** “Un electrón se dispara, como se muestra en la figura 2.32, con una velocidad de  $6.0 \times 10^6$  m/seg y un ángulo  $\theta$  de  $45^\circ$ ;  $E = 2.0 \times 10^3$  N/coul (dirigido hacia arriba),  $d = 20$  cm, y  $L = 10.0$  cm. a) ¿Chocará el electrón contra alguna de las placas? b) Si le pega a una placa, ¿en dónde lo hace?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 849).

*Solución:*

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} = \frac{(2.0 \times 10^3)(1.6 \times 10^{-19})}{(9.1 \times 10^{-31})}$$

$$a = 3.5 \times 10^{14} \text{ m/seg}^2$$

$$V_y^2 = V_{0y}^2 - 2ay$$

$$V_y = 0$$

$$2ay_{\text{máx}} = V_0^2 \text{ Sen}^2 \theta$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{V_0^2 \text{ Sen}^2 \theta}{2a} = \frac{(V_0 \text{ Sen}^2 \theta)^2}{2a}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{(6.0 \times 10^6)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2(3.5 \times 10^{14})} = 0.0257142 \text{ m}$$

$$y_{\text{máx}} = 2.57 \text{ cm}$$

a) Como  $d = 2.0 \text{ m}$  y  $Y_{\text{máx}} = 2.57 \text{ cm}$ , entonces el electrón choca con la placa.

Para responder la pregunta correspondiente al literal b), procedemos de la siguiente manera:

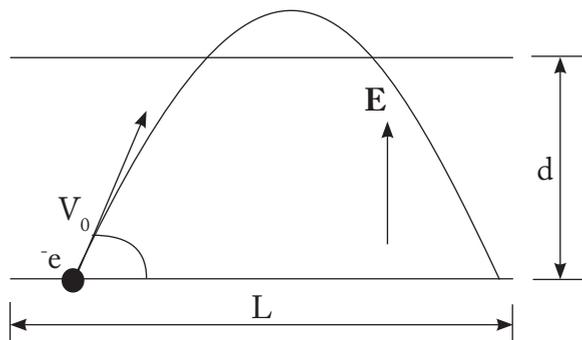


Figura 2.32. Un electrón lleva una trayectoria parabólica.

$$y = V_{0y} t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$y = V_0 \text{Sen } \theta t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$0.02 = 6 \times 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{1}{2} 3.5 \times 10^{14} t^2$$

$$1.75 \times 10^{14} t^2 - 6 \times 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2} t + 0.02 = 0$$

$$t = \frac{6 \times 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(6 \times 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4(1.75 \times 10^{14})(0.02)}}{2(1.75 \times 10^{14})}$$

$$t_1 = 1.78 \times 10^{-8} \text{ seg}$$

$$t^2 = 6.41 \times 10^{-9} \text{ seg}$$

$$x = V_{0x} t$$

$$x = V_0 \text{Cos } \theta t = 6 \times 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2} (6.4 \times 10^{-9}) = 0.0271529 \text{ m}$$

$$x = 2.7 \text{ cm}$$

El electrón se pega a la placa superior a 2.7 cm del punto de partida.

*Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos* se publica con el único propósito de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos y circuitos eléctricos.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral y álgebra vectorial. La parte teórica presenta los principales aspectos en los que se basa el electromagnetismo, para luego poderlos aplicar en el desarrollo de los problemas, siendo una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

A lo largo de todo el libro, se concede atención a las leyes de: Coulomb, Gauss, Ohm, Kirchhoff, Ampere, Biot-Savart y Lenz. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que se las puede emplear en el estudio de los circuitos eléctricos y magnéticos.

**Pedro Infante Moreira** nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es Ingeniero Electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

